

Manuel de l'Utilisateur

Rached El Fatmi

2020

Avant-Propos

CSB n'est pas un simple *énième* logiciel de RDM ou de calculs de structures. **CSB** est un logiciel de calculs de structures où chaque poutre peut être de *section absolument quelconque* (forme et matériaux); et cela va du cas homogène isotrope au cas composites à phases anisotropes librement agencées. Il s'ensuit que du point de vue des applications, tous les secteurs de la construction sont concernés : de l'aéronautique aux équipements de sports de compétition, à la construction mécanique, ..., jusqu'aux structures de la construction civile.

Traiter des poutres homogènes, hétérogènes ou composites, c'est original; mais cela n'a pratiquement de sens que parce que **CSB** exploite une méthode de calcul *adaptée* à ce type de structure et particulièrement *performante*.

CSB met en effet en œuvre une méthode de calcul à laquelle ont abouti de récents travaux de recherche (2002-2018, page-B.5) sur le calcul des poutres. Le point de départ de ces travaux est qu'une poutre est un *solide 3D élané selon une direction* et dont la section quelconque (forme et matériaux) est libre *de se déformer*. Cela a conduit, dans le cadre classique de l'élasticité linéarisée, à une méthode générale [El Fatmi, 2016] qui permet désormais de *traiter sans distinction* le cas homogène du cas hétérogène ou composite.

Cette méthode, qui s'affranchit de toutes les *hypothèses classiques des poutres* et qui ne passe pas non plus par une étape *d'homogénéisation* pour le cas hétérogène ou composite, conduit à des résultats relativement *réalistes* qu'il n'est pas commun d'obtenir pour les poutres; qu'il s'agisse *d'équilibre*, de *vibration* ou de *flambement*. Par exemples :

- la description détaillée du *champ de contraintes 3D* qui règne dans *chaque matériau* d'une poutre hétérogène, avec une *qualité* digne d'un calcul par éléments finis 3D, même pour une poutre relativement courte;
- *l'influence de la localisation* du chargement et *des effets de bords* dus aux conditions aux limites sur la valeur de la charge critique et du *mode 3D de flambement* d'une poutre.

CSB a été développé non seulement pour permettre l'exploitation de cette toute nouvelle méthode de calcul, mais pour qu'elle puisse aussitôt être *accessible* à *l'ingénieur et au technicien*.

Dans ce sens, **CSB** a été conçu pour que son utilisation ne nécessite *aucune connaissance particulière* en dehors de la théorie classique des poutres, ou de la RDM; son interface va à l'essentiel et un effort particulier a été consenti pour que sa prise en main soit pratiquement immédiate.

CSB s'adresse aux ingénieurs et techniciens comme un *outil d'aide à la conception et au calcul*, et cela concerne tous les secteurs de la construction.

CSB s'adresse aussi au monde de l'Education pour accompagner, illustrer voire *actualiser* l'enseignement de la RDM et du calcul des structures. Il peut aussi constituer un réel support à l'introduction de la *Mécanique des Matériaux Composites*, via l'analyse du comportement mécanique d'une poutre hétérogène à phases isotropes puis anisotropes.

Table des matières

1	Introduction	10
1.1	Que propose CSB ?	11
1.2	L'environnement de CSB	12
1.3	Background de CSB et méthodes de calcul	12
1.3.1	Théorie <i>classique</i> de poutre	13
1.3.2	Théorie <i>avancée</i> de poutre	13
1.4	Comment est organisé le manuel?	14
1.5	Comment débiter avec CSB ?	15
2	Installation de CSB	16
2.1	Le logiciel CSB et son environnement	17
2.2	Installation de CSB	18
2.3	Lancement de CSB	18
2.4	Fonctionnement de CSB	19
2.4.1	La connexion entre les calculs de sections et de poutres	19
2.4.2	Les interfaces des modules de calcul de CSB	19
3	Dessins et Maillages via Gmsh	21
3.1	Introduction	22
3.2	Fonctionnement de Gmsh	22
3.3	L'interface de Gmsh	23
3.3.1	La fenêtre principale de Gmsh	23

3.3.2	Modules de géométrie et maillage	24
3.4	Géométrie et maillage d'un exemple de section	25
3.4.1	La géométrie de la section	25
3.4.2	Le maillage de la section	30
3.4.3	Modification et paramétrage de la section	30
3.4.4	L'exportation du maillage de la section vers CSB	32
3.4.5	Autres commandes utiles pour la géométrie	32
3.5	Dessin et maillage d'une structure plane ou spatiale	33
3.6	Dessin réalisés avec d'autres logiciels de DAO	34
3.7	L'utilitaire Dxf2Gmsh	34
4	L'utilitaire Materials	38
4.1	Introduction	39
4.2	Les différents types de matériaux	39
4.2.1	Matériau isotrope	39
4.2.2	Matériau orthotrope	39
4.2.3	Matériau isotrope transverse	40
4.3	L'utilisation de Materials	41
4.3.1	L'interface de Materials	41
4.3.2	Déclaration d'un matériau	42
5	Le module CSection	43
5.1	Introduction	44
5.2	Notations de poutre	46
5.3	Les Caractéristiques Mécaniques de Section	47
5.3.1	Comportement (1D) et constantes de section	47
5.3.2	Autres caractéristiques de section	47
5.3.3	En résumé	48

5.4	Les caractéristiques calculées par CSection	48
5.4.1	Centres, axes et constantes de section	48
5.4.2	Champs de contraintes de section	49
5.4.3	Modes de déformation de section	51
5.5	L'utilisation de CSection	53
5.5.1	L'interface de CSection	53
5.5.2	La barre des menus	54
5.5.3	Les boutons de la zone graphique	55
5.6	La déclaration des données	55
5.6.1	L'importation d'une géométrie de section	55
5.6.2	L'affectation des matériaux à la section	56
5.6.3	L'orientation des matériaux anisotropes	57
5.6.4	Les options de calcul	59
5.6.5	Les conditions de température pour un calcul thermique	60
5.7	Les calculs et les résultats	61
5.7.1	Caractéristiques Mécaniques de Section	61
5.7.2	Solution thermique	64
5.8	L'édition des données et des résultats	65
6	Le module Plane Structure	68
6.1	Introduction	69
6.1.1	La définition de la structure et des chargements	69
6.1.2	Les calculs de structure et les résultats	69
6.2	L'utilisation de Plane Structure	71
6.2.1	La barre des menus	72
6.2.2	La zone graphique	73
6.3	La déclaration d'une structure et de ses appuis	74
6.3.1	Les points	74

6.3.2	Les sections	75
6.3.3	Les poutres	76
6.3.4	Les appuis	79
6.4	La déclaration des chargements	82
6.5	Calculs d'équilibre et résultats	87
6.5.1	La résolution	87
6.5.2	Les résultats	88
6.6	Calculs de vibrations et résultats	93
6.6.1	Les données	93
6.6.2	Les résultats	94
6.7	Calculs de Flambement et résultats	95
6.7.1	Les données	96
6.7.2	Les résultats	96
6.8	Calculs de longueurs de flambement	97
7	Le module Spatial Beam	99
7.1	Introduction	100
7.2	L'interface de Spatial Beam	101
7.3	La déclaration de la poutre et de ses appuis	102
7.3.1	L'utilisation d'une section	102
7.3.2	La génération de la poutre	103
7.3.3	Les appuis	104
7.4	La déclaration des chargements	106
7.4.1	Les types de chargement	106
7.4.2	Les déclarations de cas de charge	107
7.5	Options de calcul	110
7.6	Calculs d'équilibre	111
7.6.1	Les résultats	111

7.7	Calculs de vibrations	116
7.7.1	Les données	116
7.7.2	Les résultats	117
7.8	Calculs de flambement	118
7.8.1	Les données	118
7.8.2	Les résultats	119
8	Le module Spatial Structure	121
8.1	Introduction	122
8.2	L'utilisation de Spatial Structure	124
8.3	La déclaration de la structure et des appuis	124
8.3.1	Les points	124
8.3.2	Les sections ... et la méthode de calcul	125
8.3.3	Les poutres	126
8.3.4	Les appuis	128
8.4	La déclaration des chargements	129
8.5	Calculs d'équilibre et résultats	130
8.5.1	La résolution	130
8.5.2	Les résultats	131
8.6	Calculs de vibrations et résultats	132
8.7	Calcul de flambement et résultats	133
8.8	Calcul de longueurs de flambement	135
A	La théorie classique des poutres	136
A.1	Introduction	137
A.2	Poutre : définitions et notations	137
A.2.1	Equilibre d'une poutre	137
A.2.2	Définition d'une théorie (1D) de poutre	138

A.3	Principe de Saint Venant et théories <i>classiques</i> de poutre.	139
A.3.1	Principe de Saint Venant et solution 3D de Saint Venant.	139
A.3.2	Théories <i>classiques</i> de poutre	139
A.4	La théorie <i>classique</i> des poutres	141
A.4.1	Le système d'équations 1D et la solution 1D	142
A.4.2	La solution 3D associée	143
A.4.3	Caractéristiques Mécaniques de Section (CMS)	144
A.4.4	Résumé des équations de la théorie <i>classique</i> des poutres	145
A.5	Caractéristiques Mécaniques de Section	146
A.5.1	Cas d'une section homogène isotrope	146
A.5.2	Cas d'une section composite quelconque	149
A.5.3	Commentaires	153
A.6	Domaine de validité et effets de bords	153
A.7	Que faut-il retenir?	155
B	Une théorie non-classique de poutre	156
B.1	Introduction	157
B.2	Expression générale d'un modèle d'ordre supérieur	157
B.3	Le modèle RBT	158
B.3.1	Le choix des modes de déformation de section	158
B.3.2	Le modèle de déplacement de RBT	160
B.4	La théorie de poutre RBT	161
B.4.1	La solution RBT	163
B.5	Que faut-il retenir de RBT?	164
	Bibliographie	164

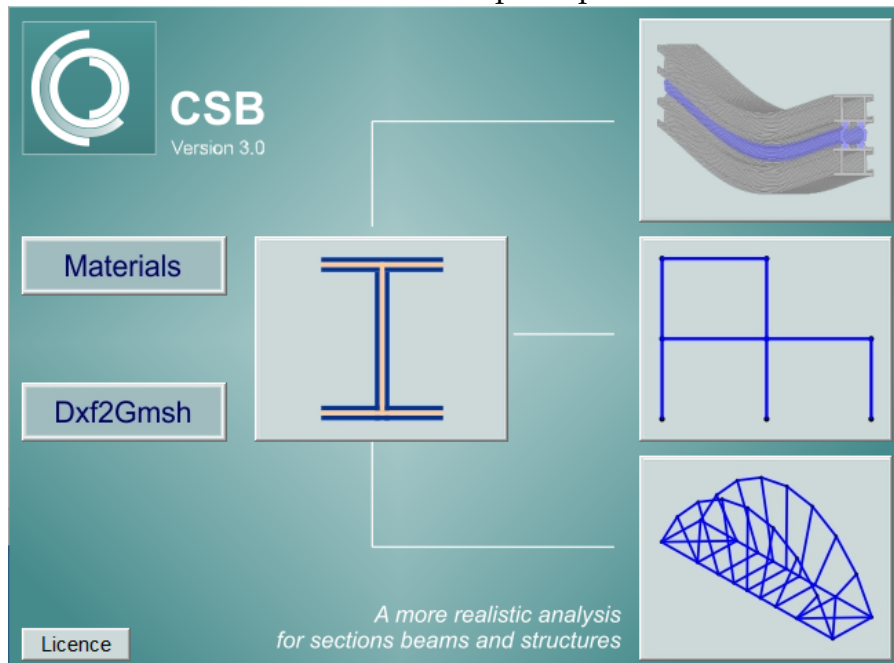
Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Que propose CSB?	11
1.2	L'environnement de CSB	12
1.3	Background de CSB et méthodes de calcul	12
1.3.1	Théorie <i>classique</i> de poutre	13
1.3.2	Théorie <i>avancée</i> de poutre	13
1.4	Comment est organisé le manuel?	14
1.5	Comment débiter avec CSB?	15

FIGURE 1.1.1 – Fenêtre principale de CSB



1.1 Que propose CSB ?

CSB est un logiciel dédié aux calculs par éléments finis (EF) de structures de poutres de section homogène hétérogène ou composite absolument quelconque : de forme quelconque et constituée d'un ou plusieurs matériaux (isotropes ou anisotropes) librement agencés.

Dans sa version actuelle, qui est proposée comme une suite logicielle, **CSB** offre 4 modules de calculs (figure-1.1.1) : un module central, **CSection**, dédié au calcul des caractéristiques de section, autour duquel gravitent 3 modules de calculs de poutres : **Spatial Beam**, **Plane Structure** et **Spatial Structure**.

CSection assure, pour une section quelconque (homogène ou composite), le calcul par EF-2D de toutes les Caractéristiques Mécaniques de Section (**CMS**) nécessaires aux calculs de poutre.

Les 3 autres modules utilisent les **CMS** fournis par **CSection** et traitent, par EF-1D, les calculs d'équilibre, de vibration ou de flambement de structures de poutres soumises à des *chargements mécaniques ou des variations de température* quelconques :

- **Plane Structure** traite les structures planes (2D) constituées *uniquement* de poutres homogènes isotropes ;
- **Spatial Beam** traite une poutre continue de section quelconque dans l'espace ;
- **Spatial Structure** traite une Structure spatiale (3D) dont chaque poutre est de section quelconque.

Remarque 1. **Spatial Structure** permet naturellement de traiter une seule poutre, mais **Spatial Beam** propose un traitement *plus fin* de la poutre et fournit un *rendu 3D* de la déformée à l'équilibre, d'un mode de vibration ou d'un mode flambement.

1.2 L'environnement de CSB

CSB a été développé sous **Matlab**, mais il ne nécessite pas l'acquisition de **Matlab**. Son fonctionnement exige cependant l'installation préalable du package **Matlab Runtime** (gratuit).

Dans **CSB**, les calculs de section se font par EF-2D et les calculs de structures de poutres par EF-1D; mais **CSB** ne propose pas d'outil de dessin et de maillage. L'utilisateur est invité à réaliser dessin (géométrie) et maillage à l'extérieur de **CSB** via le générateur de maillage **Gmsh** (open source), puis à les importer dans **CSB**.

Pour le cas particulier d'une structure (2D ou 3D) de poutres, **CSB** propose, en mode interactif via son interface graphique, l'introduction manuelle de la structure. Cependant, il est généralement plus commode (pour les structures importantes) de les avoir préalablement définies (dessin et maillage 1D) à l'aide de **Gmsh** puis de les importer dans **CSB**. Une alternative, sans passer par **Gmsh**, est d'importer dans **CSB** une structure (2D ou 3D) dont la géométrie (points et lignes droites) à été réalisée à l'aide d'outils de DAO (tels que **Qcad**, **Autocad**, ...) et sauvegardée au format dxf.

Mis à part ses 4 modules de calculs, **CSB** propose deux outils utiles au module **CSection** de calcul de section :

Materials Cet utilitaire permet à l'utilisateur de définir ses propres listes de matériaux (isotropes, isotropes transverses ou orthotropes) et de les rajouter aux listes de matériaux fournies par défaut.

Dxf2Gmsh Cet utilitaire permet de convertir une section dont la géométrie a été conçue (via un logiciel de DAO) et enregistrée au format .dxf, en un fichier de géométrie au format .geo utilisable par **Gmsh**. C'est ensuite, dans **Gmsh**, que la section sera maillée avant d'être importée dans le module **CSection** pour être calculée.

1.3 Background de CSB et méthodes de calcul

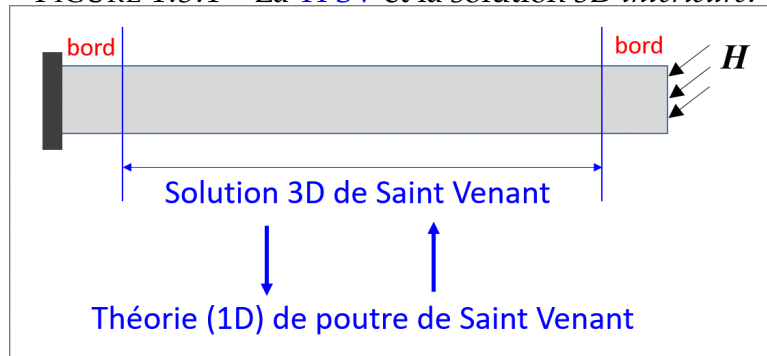
Comme annoncé dans l'avant-propos, **CSB** met en œuvre une toute récente méthode de calcul qui permet désormais de traiter *sans distinction* le cas homogène du cas composite quelconque; cette méthode est de plus déclinée sous deux versions qualifiées :

- de *classique* et désignée par **CBT**, (Classical Beam Theory)
- ou d'*avancée* (non classique) et désignée par **RBT** (Refined Beam Theory)

où la version *avancée*, va au-delà de celle *classique*, pour rendre compte des effets de bords dus aux conditions d'extrémités ou de la localisation précise d'un chargement sur la poutre.

Il n'est évidemment pas question dans ce manuel de détailler les aspects théoriques et techniques inhérents à ces deux méthodes de calculs dont l'essentiel est présenté dans les Annexes-A-B. Il est cependant important au moins d'en préciser ici le cadre, pour que ces méthodes puissent être situées par rapport à celles communément utilisées et que l'on associe à Timoshenko ou Bernoulli (selon que l'on souhaite ou pas rendre compte des cisaillements d'effort tranchant).

FIGURE 1.3.1 – La TPSV et la solution 3D intérieure.



1.3.1 Théorie *classique* de poutre

Le qualificatif *classique* (décliné en italique) obéit ici à une définition précise et dans laquelle s'inscrivent toutes les théories de poutre qui s'appuient sur le Principe de Saint Venant.

Les théories de Timoshenko ou de Bernoulli font naturellement partie des théories *classiques* de poutres, mais elles ne constituent en fait que des formes *approchées* de la théorie *classique de référence* qu'est celle (peu connue) de Saint Venant qui, dans sa version¹ étendue actuelle s'applique aussi au cas des poutres de *section hétérogène quelconque*.

Ce qu'on entend, dans **CSB**, par théorie *classique* de poutre (**CBT**), est précisément la théorie de poutre de Saint Venant (**TPSV**) qui représente la version *exacte* de la théorie *classique* des poutres. C'est à dire celle qui ne concède aucune hypothèse supplémentaire à celle qu'implique le cadre du Principe de Saint Venant et qui, pratiquement, conduit à ne retenir des actions extérieures et intérieures, au droit d'une section, que leur *torseur résultant* (force et moment).

Il faut souligner que la **TPSV**, tout en s'incrivant dans le cadre du Principe de Saint Venant,

- n'inclue *aucune des hypothèses* généralement consenties pour les poutres dont, en particulier, l'indéformabilité de la section ;
- ne passe *pas* par *une étape d'homogénéisation des matériaux* de la section pour le cas hétérogène ou composite.
- et permet de *remonter* à la **solution 3D de Saint Venant** (en déplacement et en contrainte), laquelle représente la solution 3D exacte, *loin des bords* (figure-1.3.1).

1.3.2 Théorie *avancée* de poutre

La **TPSV**, comme toute théorie *classique* de poutre, n'a pratiquement d'intérêt que si les *effets de bords* restent *confinés* aux bords et sans grande influence sur le comportement global de la poutre. Mais cela n'est pas toujours le cas : par exemple, l'effet du *gauchissement gêné* lors de la torsion d'un profilé mince ouvert ; dans ce cas, la torsion associée à la **TPSV** doit céder la place à la *théorie de la torsion gênée* de Vlasov qui permet de rendre compte de cet effet de bord particulier.

1. Etablie à l'origine par Saint Venant pour le cas homogène isotrope, la théorie de poutre de Saint Venant a été assez récemment (1976) étendue au cas des sections hétérogènes de formes quelconques et constituées de matériaux anisotropes librement agencés.

Les effets de bords dépendent des conditions aux limites (en force et en déplacement) et de la nature de la section (forme et matériaux). Si pratiquement, le seul cas notable pour le cas homogène isotrope est le gauchissement gêné évoqué ci-dessus, bien d'autres cas peuvent se manifester pour le cas hétérogène ou composite.

La théorie *avancée*, désignée par **RBT** est une théorie de poutre qui va au-delà de la **TPSV** pour rendre² compte de *l'essentiel* de ces *effets de bords*.

1.4 Comment est organisé le manuel ?

En dehors de la présente introduction et d'un chapitre dédié à l'installation de **CSB** et de son environnement, ce manuel propose, de manière séparée (ce qui implique certaines répétitions), la présentation détaillée de chacun des 4 modules de calculs (**CSection**, **Plane Structure**, **Spatial Beam** et **Spatial Structure**) et de l'utilitaire **Materials**.

Le lecteur trouvera par ailleurs, un chapitre dédié à l'utilisation de **Gmsh** pour la réalisation de dessins et maillages de sections ou de structures ; il s'agit d'une introduction à **Gmsh** limitée aux besoins de **CSB**. C'est par ailleurs dans ce même chapitre que l'utilitaire **Dxf2Gmsh** est présenté.

Ainsi, dans l'ordre, ce manuel se compose de :

1. Introduction
2. Installation de **CSB**
3. Dessins et Maillages via **Gmsh**
4. L'utilitaire **Materials**
5. Le module **CSection**
6. Le module **Plane Structure**
7. Le module **Spatial Beam**
8. Le module **Spatial Structure**

et deux chapitres, placés dans les annexes, présentant l'essentiel des deux méthodes de calculs mises en oeuvre dans **CSB** :

- La théorie classique des poutres (**CBT**)
- Une théorie non classique de poutre (**RBT**)

Tous les chapitres ont été rédigés de manière à permettre leur lecture séparée, sauf les chapitres 8 (**Spatial Beam**) et 9 (**Spatial Structure**). Ils supposent tous deux, la lecture préalable du chapitre 7 (**Plane Structure**) ; leur fonctionnement étant formellement similaire. De plus, parce que ces deux modules proposent les deux méthodes de résolution **CBT** (*classique*) et **RBT** (*avancée*), il est aussi fortement recommandé que l'utilisateur ait préalablement parcouru leur présentation donnée dans les Annexes-A-B.

2. Naturellement, **RBT** permet de retrouver, pour le cas homogène isotrope, la *torsion gênée* de Vlasov. De ce point de vue, **RBT** peut être vue comme une *très large extension* de la théorie de Vlasov : sollicitation quelconque, section quelconque, déformation quelconque de section (Effets Poisson, gauchissements, distorsions).

1.5 Comment débiter avec CSB?

L'utilisation de **CSB** ne nécessite aucune connaissance particulière sinon la théorie classique des poutres communément utilisée (ou encore la RDM).

Une fois l'installation de **CSB** effectuée, il est recommandé de se limiter dans un premier temps à l'utilisation du module **Plane Structure** qui traitent des structures de poutres dans le plan (2D) et dont les sections sont *homogènes isotropes*. Dans ce module, plusieurs sections sont proposées par défaut et il est possible d'utiliser celles du catalogue des sections normalisées d'acier.

Le module **CSection** ne doit être sollicité que pour définir et calculer une nouvelle section. Le cas échéant, le traitement d'une section homogène isotrope est simplissime et permet immédiatement de visualiser les centres (d'inertie et de torsion) et axes (d'inertie) de section ainsi que d'afficher toutes les constantes de la section (Aire, moments d'inertie, constante de torsion, sections réduites d'effort tranchant, ...). Toute nouvelle section calculée via **CSection** peut être sauvegardée (cataloguée) pour être désormais utilisable dans le module **Plane Structure**.

Le module de structure plane (**Plane Structure**) et le module de calcul de section (**CSection**), réduit au cas homogène isotrope, permettent à l'utilisateur débutant de *retrouver* le cadre classique de la RDM et du calcul des structures qu'il est supposé connaître; qu'il s'agisse *d'équilibre de vibration ou de flambement*. S'acquitter de cette étape lui permettra de se *familiariser* avec le fonctionnement de **CSB**, avant de se tourner vers les deux autres modules plus pointus, **Spatial Beam** et **Spatial Structure**, qui traitent des poutres tant homogènes qu'hétérogènes dans l'espace, et pour lesquels, deux méthodes de calculs sont proposées (**CBT** et **RBT**) selon que l'on souhaite ou pas tenir compte des éventuels *effets de bords*.

Chapitre 2

Installation de CSB

Sommaire

2.1	Le logiciel CSB et son environnement	17
2.2	Installation de CSB	18
2.3	Lancement de CSB	18
2.4	Fonctionnement de CSB	19
2.4.1	La connexion entre les calculs de sections et de poutres	19
2.4.2	Les interfaces des modules de calcul de CSB	19

2.1 Le logiciel CSB et son environnement

CSB est reçu sous la forme d'un dossier (qu'on appellera **CSB_folder**) contenant, pour l'essentiel :

- L'application **csb**
- Un dossier **csb_examples**
- Un dossier **csb_documentation**
- Un dossier **csb_stell_library** contenant toutes les sections (d'acier) normalisées
- Un fichier **lisez_moi** qu'il faut parcourir
- Un éventuel fichier **csb_licence**
- et quelques fichiers et dossiers nécessaires au fonctionnement de **CSB** et qu'il est inutile ici d'évoquer.

D'un point de vue matériel, **CSB** nécessite un PC fonctionnant sous un système d'exploitation 64-bit, exploitant au moins un processeur type Intel i5 ou équivalent et disposant de 4Go de RAM. **CSB** occupe environ 1Go sur le disque, dont environ 600 Mo pour le catalogue de sections (**csb_stell_library**) d'acier et 200Mo pour le dossier d'exemples (**csb_examples**).

Développé sous **Matlab**, **CSB** nécessite l'installation préalable de **Matlab Runtime**. Il s'agit d'un package de **Matlab** (gratuit) permettant aux applications développées sous **Matlab** de fonctionner. **Matlab Runtime** peut être obtenu à l'adresse suivante :

<http://www.mathworks.com/products/compiler/mcr/index.html>

A cette adresse plusieurs versions de **Matlab** sont proposées. La version qu'il faut télécharger et installer est la version indiquée dans le fichier **lisez_moi**. Cette étape doit être faite une seule fois. Une mise à jour de **CSB** ne nécessite pas de réinstaller **Matlab Runtime**.

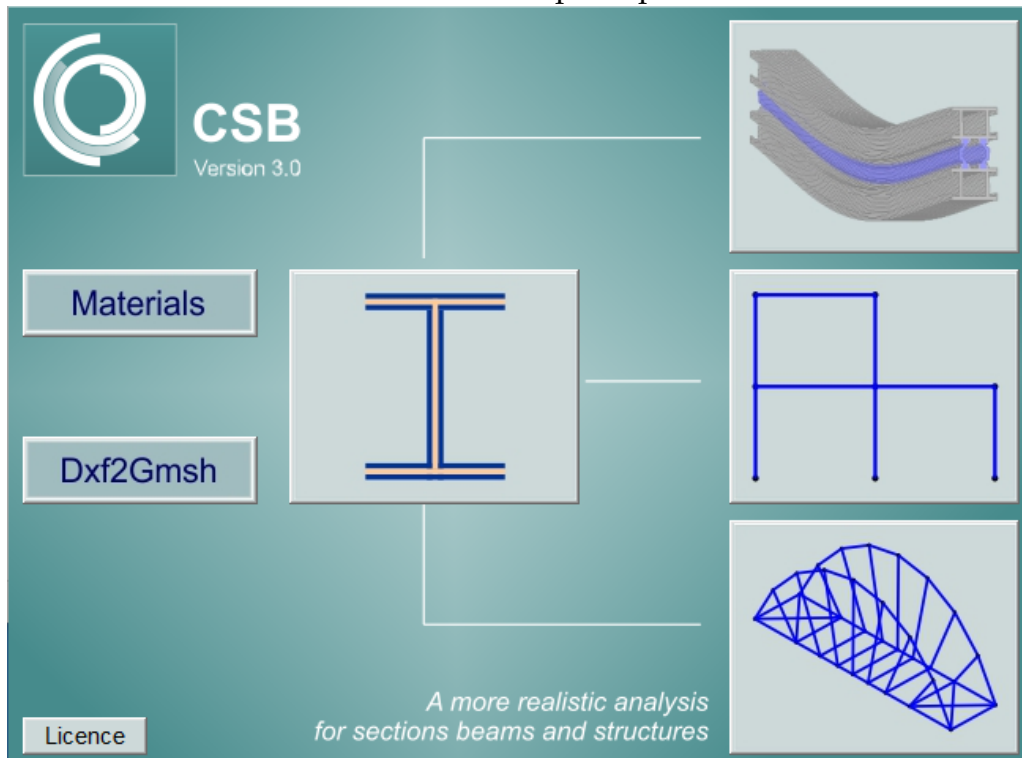
CSB assure des calculs par EF-1D pour les structures de poutres et par EF-2D pour les sections, mais ne propose pas d'outils de dessins et de maillage. **CSB** importe des fichiers de maillage de section ou de structure réalisés à l'aide du générateur de maillage **Gmsh** (open source) qui peut être obtenu à l'adresse suivante :

<http://gmsh.info>

Son installation se fait par simple copie. Le chapitre-3 est dédié à l'utilisation de **Gmsh** pour les besoins de **CSB**.

Il est enfin utile de noter que pour le cas des structures, il est aussi possible dans **CSB** d'importer une géométrie 2D ou 3D de structure réalisée avec des logiciels de DAO tels que **Qcad**, **Autocad**, ..., via le format **dxg**.

FIGURE 2.2.1 – Fenêtre principale de CSB.



2.2 Installation de CSB

Pour **CSB**, il n’y a pas de réelle procédure d’installation. Le dossier **CSB_folder** peut être copié là où l’utilisateur le souhaite. Et, pour peu que **Matlab Runtime** ait été installé, l’application **csb** pourra être aussitôt lancée. La création d’un raccourci de l’application **csb** sur le bureau est recommandée.

Version d’évaluation de CSB. Si le dossier **CSB_folder** ne comporte pas de licence en cours de validité, **CSB** fonctionne en mode d’évaluation (Trial). La version d’évaluation n’est pas limitée dans le temps. Elle fonctionne de manière complète et normale, sauf qu’elle ne permet d’utiliser que les quelques sections (homogènes ou hétérogènes) données en exemples. Il ne sera pas possible de définir de nouvelles sections ou d’accéder aux sections du catalogue des sections d’acier normalisées.

Cependant, l’utilisateur pourra, s’il le souhaite, changer les matériaux des sections données en exemples et relancer leur calcul dans le module **CSection**.

2.3 Lancement de CSB

Lors de la première exécution de l’application **CSB**, un dossier **CSBvX** (version n°X) sera créé pour l’utilisateur et dans lequel sera placée une copie du dossier **csb_examples**. L’utilisateur pourra ainsi utiliser et modifier librement les exemples, sans altérer le contenu du dossier **CSB_folder** qu’il est recommandé de conserver dans l’état original.

Au lancement de **CSB**, sa fenêtre principale apparaît. Elle regroupe (figure-2.2.1) plusieurs boutons (icônes) permettant de lancer les 4 modules de calculs de **CSB** :

- **CSection**
- **Spatial Beam**
- **Plane Structure**
- **Spatial Structure**

les deux utilitaires utiles à **CSection** :

- **Materials**
- **Dxf2Gmsh**

ainsi qu'un bouton **licence** permettant à l'utilisateur de demander, éventuellement, une licence.

2.4 Fonctionnement de **CSB**

2.4.1 La connexion entre les calculs de sections et de poutres

Il est important de retenir que les 3 modules de calculs de poutre (**Spatial Beam**, **Plane Structure**, et **Spatial Structure**) ne peuvent traiter que des poutres dont les *sections*¹ ont été *préalablement calculées avec le module de section CSection* ; ce module joue donc un rôle central comme l'indique sa position dans la fenêtre principale de **CSB** figure-2.2.1.

Les Caractéristiques Mécaniques de Section (**CMS**) que **CSection** détermine, et qui vont bien au-delà des seules constantes classiques (aire, moments d'inerties, constante de torsion, ...), sont toute exploitées par les modules de calculs de poutres.

Chaque section calculée par **CSection** est sauvegardée dans un fichier. Les modules de calculs de structures de poutres proposent l'accès aux fichiers de section pour que l'utilisateur puisse affecter la section qu'il souhaite à chacune des poutres de la structure.

Mis à part cette précision sur les sections, les 3 modules de calculs de poutres fonctionnent de manière indépendante.

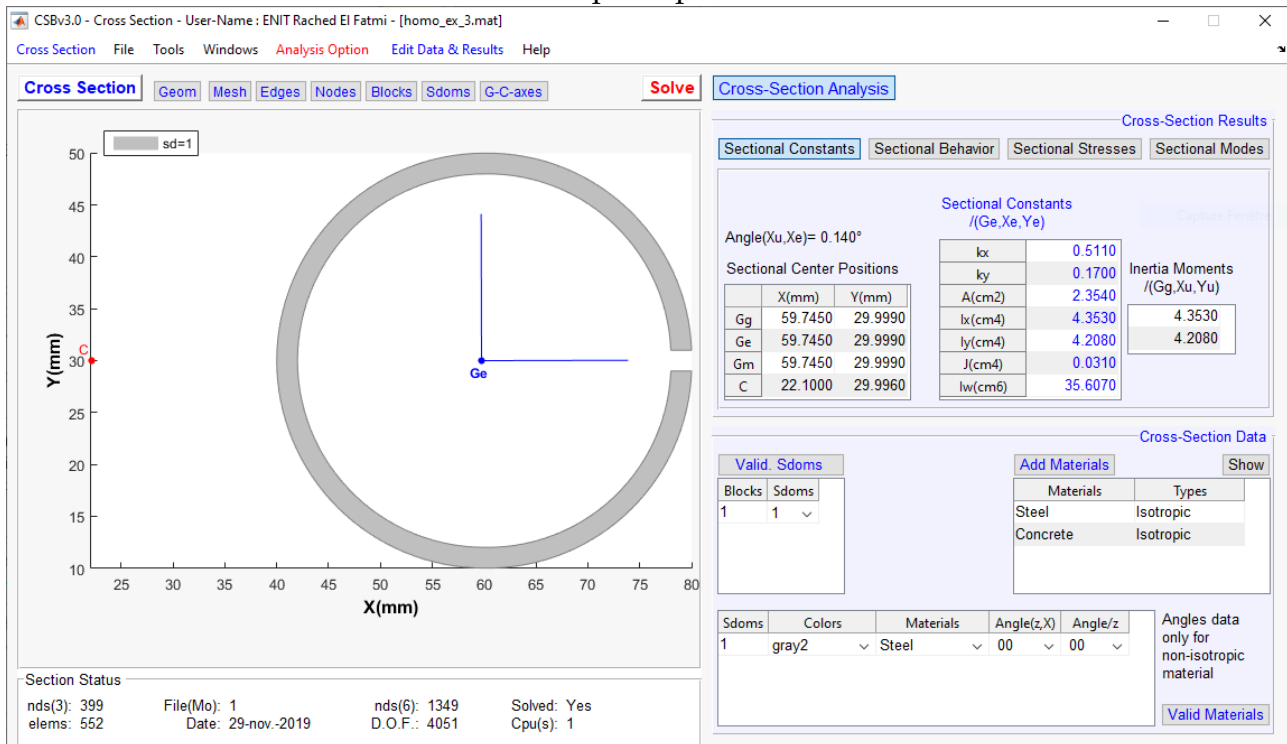
2.4.2 Les interfaces des modules de calcul de **CSB**

Les interfaces graphiques des différents modules de calcul obéissent à un principe général : données et résultats *sont sur la table* ; ils sont *immédiatement accessibles* et il n'y a pas besoin d'aller les chercher à travers des menus et sous menus. La figure-2.4.1 affiche, pour illustration, l'interface du module **CSection** de calcul de section.

L'interface de chacun des modules offre pratiquement 3 zones :

1. Naturellement, toutes les sections d'acier du catalogue proposé à l'utilisateur ont aussi été calculées à l'aide de **CSection**.

FIGURE 2.4.1 – Fenêtre principale du module CSection



- un cadran pour les différentes *affichages graphiques* (la section ou la structure); la zone gauche (figure-2.4.1) pour le module de section.
- un cadran pour les *données* qui se présentent généralement sous formes de tables directement accessibles et modifiables; le cadran intitulé **Cross-Section Data** (figure-2.4.1, en bas à droite) pour le module de section.
- un cadran pour les *résultats* dont le contenu, qui s’affiche dès l’exécution des calculs, propose un ensemble d’onglets et de boutons permettant de visualiser tous les résultats disponibles; le cadran intitulé **Cross-Section Results** (figure-2.4.1, en haut à droite) pour le module de section.

Le menu proposé en tête de l’interface graphique est *minimaliste* et pratiquement le même pour les 4 modules de calcul. Il se restreint aux opérations classiques agissant sur le fichier courant, telle que la sauvegarde, l’édition des données ou des résultats, l’accès aux différentes fenêtres ouvertes (contenant des résultats particuliers et généralement graphiques) et enfin l’accès à l’aide.

Chapitre 3

Dessins et Maillages via Gmsh

Sommaire

3.1	Introduction	22
3.2	Fonctionnement de Gmsh	22
3.3	L'interface de Gmsh	23
3.3.1	La fenêtre principale de Gmsh	23
3.3.2	Modules de géométrie et maillage	24
3.4	Géométrie et maillage d'un exemple de section	25
3.4.1	La géométrie de la section	25
3.4.2	Le maillage de la section	30
3.4.3	Modification et paramétrage de la section	30
3.4.4	L'exportation du maillage de la section vers CSB	32
3.4.5	Autres commandes utiles pour la géométrie	32
3.5	Dessin et maillage d'une structure plane ou spatiale	33
3.6	Dessin réalisés avec d'autres logiciels de DAO	34
3.7	L'utilitaire Dxf2Gmsh	34

3.1 Introduction

CSB assure des calculs de section par EF-2D et des calculs de structures de poutres par EF-1D, mais il ne propose pas d'outil de dessins et de maillages. Qu'il s'agisse de calcul de section ou de structure, **CSB** importe uniquement le fichier maillage de la section ou de la structure préalablement conçue et maillée via le générateur de maillages **Gmsh**. Les maillages générés par **Gmsh** peuvent être exportés selon différents formats vers différents codes de calculs par éléments finis, dont **CSB**. **Gmsh** (open source) est téléchargeable gratuitement à l'adresse :

<http://gmsh.info>

Son installation se fait par simple copie.

Ce chapitre propose une prise en main de **Gmsh** orientée vers les besoins de **CSB** en termes de dessins et de maillages et limitée aux opérations de base. Pour plus de détails, l'utilisateur est invité à consulter le manuel de **Gmsh** et à tester les différents exemples proposés qui accompagnent l'installation.

Cette présentation se fera essentiellement via la réalisation d'un exemple de section; cela permettra d'illustrer le fonctionnement de **Gmsh** via quelques opérations de base pour générer une géométrie de section et la mailler .

3.2 Fonctionnement de Gmsh

Gmsh offre deux modes de fonctionnement : de manière *interactive* via son interface graphique ou bien via un fichier texte contenant un *script de commandes*. Les deux modes co-existent et nous verrons l'avantage, pour la pratique, de mixer l'utilisation des deux modes.

Dans **Gmsh**, la réalisation d'un exemple de géométrie maillée (qu'on appellera simplement exemple) génère 2 fichiers :

- Un fichier texte `exemple.geo` contenant le script de commandes nécessaires à l'obtention (et la sauvegarde) de la géométrie ; le format `.geo` est un format propre à **Gmsh** .
- Un fichier texte `exemple.msh` contenant le maillage ; le format `.msh` est un format propre à **Gmsh** .

En mode interactif, le fichier `exemple.geo` est obligatoirement créé et mis à jour de manière continue, au fur et à mesure des manipulations que l'utilisateur effectue. L'utilisateur, sans quitter **Gmsh** en mode interactif, peut consulter l'évolution du script de commandes contenu dans `exemple.geo`.

Le maillage, dont l'obtention est pratiquement automatique, est par défaut sauvegardé au format `.msh` propre à **Gmsh**. Mais, pour être utilisé par **CSB**, le maillage doit être *exporté* au format `.inp` qui figure parmi les formats proposés par **Gmsh**.

Pratiquement, pour **Gmsh**, la sauvegarde de exemple se réduit, pour l'essentiel, à l'enregistrement du fichier `exemple.geo`, et (si le maillage a été réalisé) à la création du fichier de maillage qui lui est associé.

Pratique de **Gmsh** pour la modification ou la définition d'une géométrie

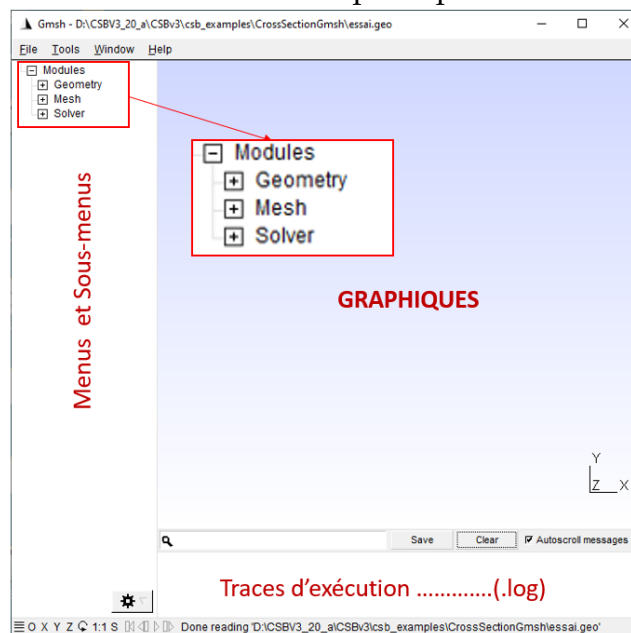
La modification d'une géométrie peut naturellement se faire en mode interactif (ce qui met systématiquement à jour `exemple.geo`), mais il est souvent plus rapide ou *pratique* d'intervenir *manuellement* sur le script de commandes contenu dans le fichier `exemple.geo`, le modifier puis le *recharger* dans **Gmsh**.

Plus encore, la syntaxe des commandes de **Gmsh** étant assez simple, l'utilisateur peut aussi, assez rapidement, générer manuellement un script de commandes correct permettant d'obtenir la géométrie qu'il souhaite. Dans ce cas, **Gmsh**, en mode *interactif*, se réduira alors à vérifier (visualisation) la géométrie qui aura été définie, puis à générer (automatiquement) le maillage.

C'est généralement ainsi que l'on travaille avec **Gmsh**.

3.3 L'interface de Gmsh

FIGURE 3.3.1 – Fenêtre principale de **Gmsh**



3.3.1 La fenêtre principale de Gmsh

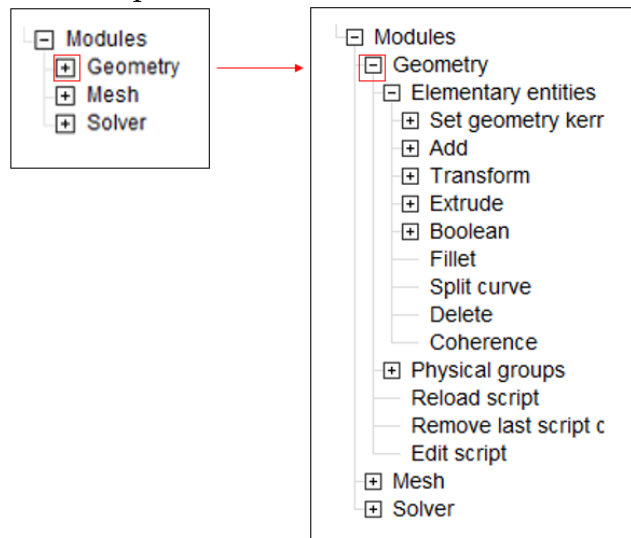
Le lancement de **Gmsh** conduit à l'affichage d'une fenêtre qui, mis à part le menu placé en tête, offre figure-3.3.1 :

- à gauche une colonne proposant 3 Modules (Geometry, Mesh, Solver) destinée à déployer des menus et sous-menus figure-3.3.2, conduisant à des boutons (commandes) permettant à l'utilisateur de réaliser de manière interactive des géométries et de les mailler ; le module Solver ne nous concerne pas.

- à droite une zone principalement destinée aux affichages graphiques,
- de plus, l'utilisateur peut déployer, sous cette zone graphique, un cadre où **Gmsh** affiche toutes les informations associées à l'exécution des commandes. Si **Gmsh** rencontre des problèmes pour réaliser une géométrie ou un maillage, c'est dans ce cadre qu'il indique les éventuelles erreurs (en rouge).

Dans ce qui suit, seuls les modules Geometry et Mesh seront présentés.

FIGURE 3.3.2 – Déploiement des menus et sous menus de **Gmsh**



3.3.2 Modules de géométrie et maillage

Géométrie

On ne présentera que les outils permettant

- de réaliser des points, des lignes droites et des arcs de cercle
- de générer translation rotation et symétrie d'une entité de dessin
- d'annuler une commande (marche arrière)
- d'éditer le script de commandes (affichage du fichier.geo),
- de recharger le script de commandes

Geometry ▸ Elementary entities ▸ Add conduit à l'affichage dans la colonne de gauche des différents outils élémentaires de dessins dont :

Poin pour définir des points par leurs coordonnées ou graphiquement à la souris

Line pour définir graphiquement des lignes droites par leurs points extrêmes

Circle arc pour définir graphiquement un arc de cercle passant par trois points

Geometry ▸ Elementary entities ▸ Transform conduit à l'affichage dans la colonne de gauche de :

Translate pour translater tout ou partie d'un dessin

Rotate pour tourner tout ou partie d'un dessin par rapport à un axe passant par un point

Symmetry pour obtenir la partie symétrique de tout ou partie d'un dessin selon une symétrie plane

Geometry propose aussi :

Remove last script command pour annuler la dernière commande (marche arrière)

Reload script pour recharger le script de commandes (si modification du fichier.geo)

Edit script pour afficher le script de commandes (le fichier.geo) dans une fenêtre

Maillage

On se restreint à l'obtention de maillages automatiques, même s'il est possible dans **Gmsh** de mailler un domaine de manière particulière.

Mesh conduit à l'affichage dans la colonne de gauche de plusieurs boutons dont :

1D qui permet d'effectuer un maillage en éléments finis 1D de toutes les lignes présentes dans une géométrie.

2D qui permet d'effectuer un maillage :

- en éléments finis 1D de toutes les lignes présentes dans une géométrie.
- et en éléments finis 2D de toutes les surfaces présentes dans une géométrie

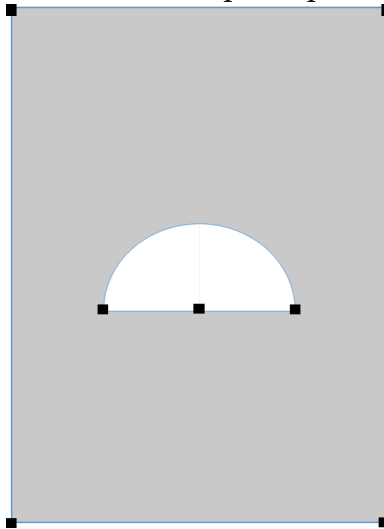
3.4 Géométrie et maillage d'un exemple de section

L'exemple figure-3.4.1 est une section rectangulaire comportant un trou en forme de demi-cercle. Le contour extérieur est formé de 4 lignes droites reliant 4 points. Le contour intérieur est formé d'un demi-cercle et d'une ligne droite (le diamètre) qui peuvent être définis par 3 autres points. La section présente un seul domaine ou surface qui est limité par les deux contours.

3.4.1 La géométrie de la section

Une fois **Gmsh** lancé, **File** ▸ **New** conduit à l'affichage d'une fenêtre invitant l'utilisateur à choisir un nom de fichier, puis une fenêtre permettant de choisir le type de fichier (choisir **.geo**) et enfin, depuis les récentes versions de **Gmsh** une autre fenêtre permettant de choisir le mode de fonctionnement de **Gmsh** (choisir **Built-in**).

FIGURE 3.4.1 – Fenêtre principale de **Gmsh**



Les points (commande **Point**)

Un point est défini par 4 valeurs :

X, Y, Z les coordonnées du point

Prescribed mesh size at point une valeur (qu'on notera **Pmsp**) fixant la taille du maillage désirée autour de ce point. Si ce paramètre est le même pour tous les points, le maillage sera relativement uniforme. Une valeur plus petite en un point particulier conduira à serrer le maillage autour de ce point.

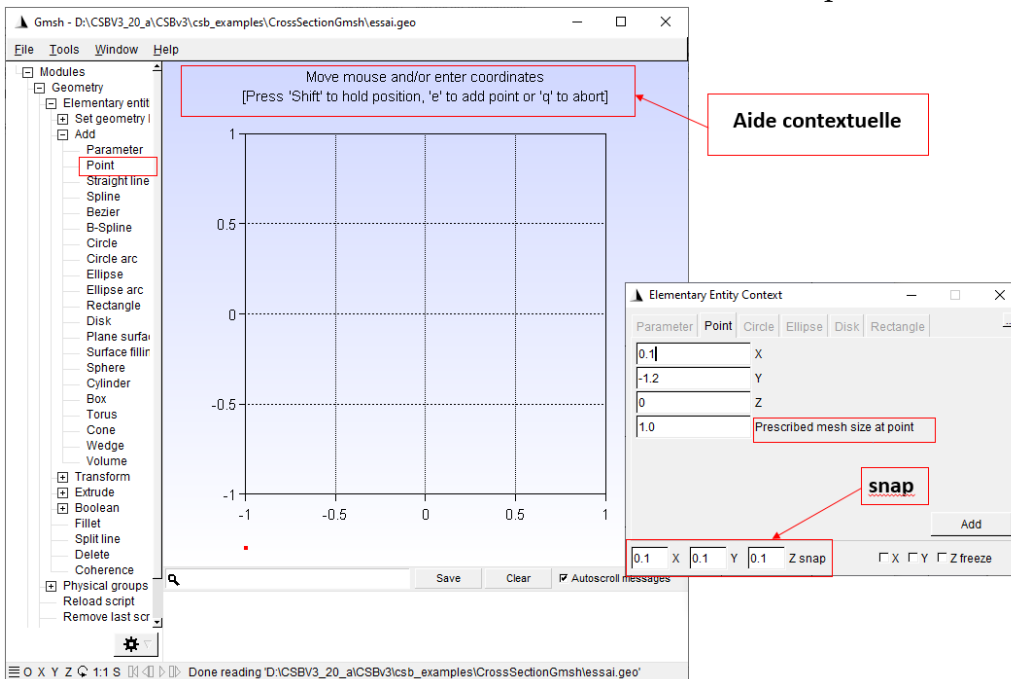
La syntaxe de la commande **Point** qui permet de déclarer un point numéro *i* dans un script est :

```
Point(i)={Xi, Yi, Zi, Pmsp};
```

Dans **Gmsh**, au niveau interactif, la commande **Point** conduit à l'affichage (figure-3.4.2)

- dans la zone graphique :
 - une grille (proposée par défaut) dont l'aspect peut être contrôlé via **File** ▷ **Tools** ▷ **General** qui permet de changer ses dimensions ou simplement de ne pas l'afficher.
 - d'un texte (aide contextuelle) placé en haut de la zone graphique, donnant comment se fait la saisie d'un point en mode interactif (en tapant au clavier) :
 - shift** pour fixer un point positionné avec la souris
 - e** pour ajouter le point
 - q** pour quitter la commande **Point**
- et d'une fenêtre permettant de saisir manuellement (plus précis) les coordonnées et de la valeur du paramètre **Prescribed mesh size at point (Pmsp)** de chaque point. La valeur du paramètre **Pmsp** est proposée par défaut (au départ 1, puis la valeur précédemment choisie par l'utilisateur, pour un nouveau point). Par ailleurs, il est indiqué au bas de cette fenêtre 3 cases contenant (par défaut) 0.1 pour fixer les déplacements *discrets* de la souris selon selon **X, Y** et **Z (snap)**. Ces valeurs peuvent être modifiées pour une saisie graphique plus précise des points ;

FIGURE 3.4.2 – Déclaration des points



Une fois les 7 points introduits avec une même valeur de 0.25 pour le paramètre Pmsp, la figure-3.4.3 montre à gauche les points dans la zone graphique de **Gmsh**, et à droite le contenu du fichier exemple.geo qui a été généré au fur et à mesure de l'introduction des points.

Tout en restant dans **Gmsh**, en mode interactif, il est possible à tout instant d'accéder au fichier exemple.geo via la commande Edit script.

Le fichier exemple.geo contient (en dehors de quelques lignes de commentaires propres à **Gmsh** qui ne sont pas affichées ici) le script de commandes précisant la déclaration des 7 points (une ligne qui commence par // indique une ligne de commentaires).

FIGURE 3.4.3 – Les points dans la zone graphique et le script du fichier .geo

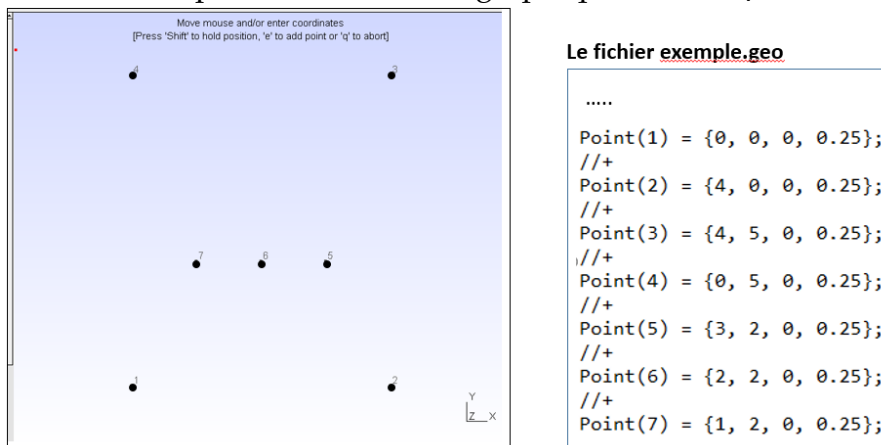
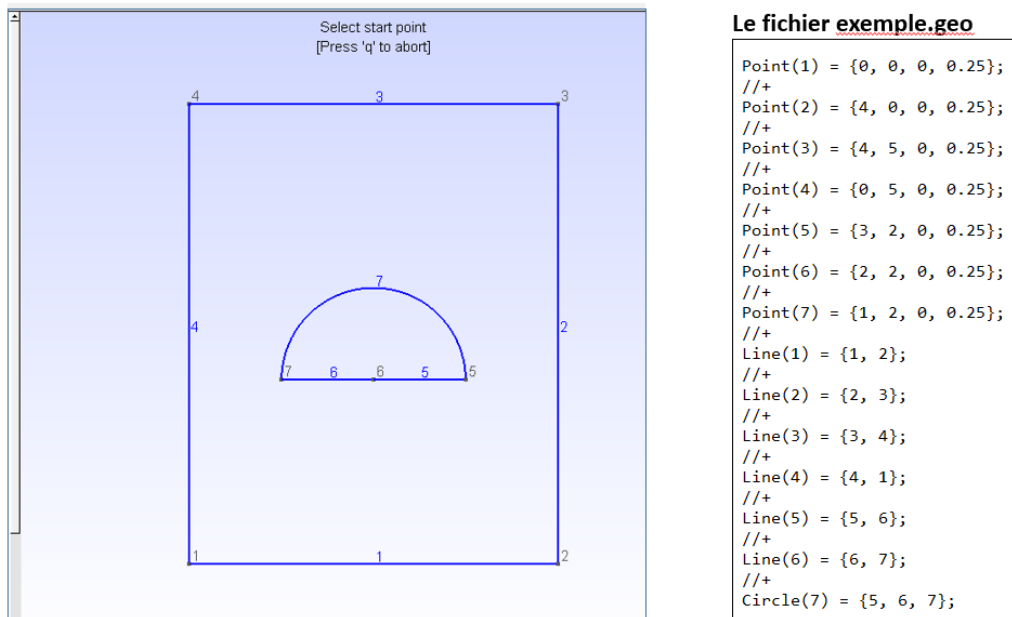


FIGURE 3.4.4 – Les contours de la section et l'état du script de commandes



Les lignes droites (commande **Line**)

Le fonctionnement de la commande **Line** est uniquement graphique. Une ligne droite est définie par la sélection de ses deux points : début et fin (un point sélectionné passe de la couleur bleue à rouge; cela est vrai pour toute sélection d'un objet graphique).

La syntaxe de la commande qui permet de déclarer une ligne numéro *i* dans un script est :

Line(i)={P1, P2};
 où P1 et P2 sont le numéros des deux points.

Les arcs de cercle (commande **Circle arc**)

Le fonctionnement de la commande **Circle arc** est uniquement graphique. Un arc est défini par la sélection de trois points (dans l'ordre) : début, centre et fin.

La syntaxe de la commande qui permet de déclarer une arc numéro *i* dans un script est :

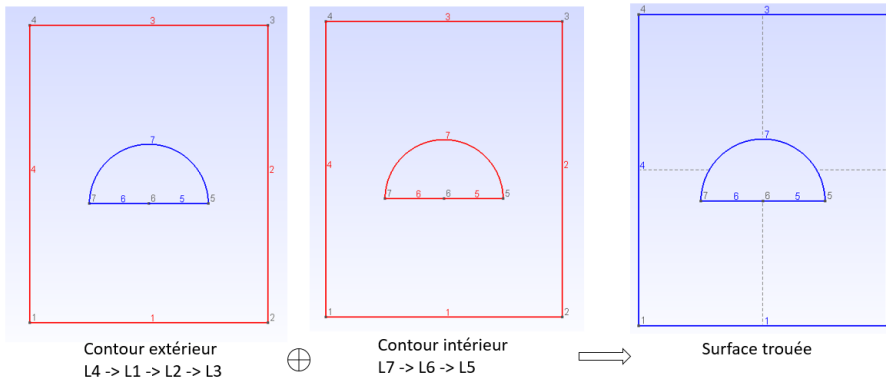
Circle(i)={P1, P2, P3};

Une fois les lignes droites et l'arc de cercle introduits, on obtient les contours extérieur et intérieur de la section. La figure-3.4.4 affiche la zone graphique et l'état du script de commandes qui lui correspond.

La surface de la section (commande **Plane surface**)

Le fonctionnement de la commande **Plane surface** est uniquement graphique. Une surface est définie par son contour ou bien ses contours. Si plusieurs contours sont sélectionnés, le

FIGURE 3.4.5 – Surface à partir de contours

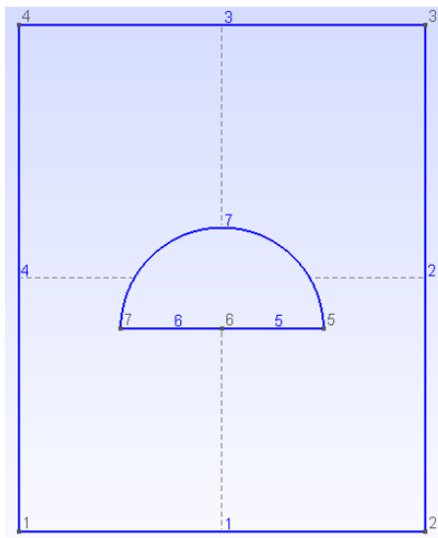


premier est considéré comme le contour extérieur, et tous les autres sont considérés intérieurs (permettant de déclarer des trous).

La sélection d'un contour se fait par la sélection des lignes qui forment le contour (dès la sélection de la première ligne, **Gmsh** sélectionne (quand cela est possible) le reste du contour de manière automatique).

Quand un domaine (contour délimitant une surface) a fini d'être sélectionné (figure-3.4.5), **Gmsh** fait apparaître deux traits perpendiculaires et discontinus à travers le domaine; cela permet de vérifier que le domaine a bien été pris en considération et qu'il correspond à ce que l'on souhaite.

FIGURE 3.4.6 – Géométrie de la section et le script correspondant



```
//+
Line Loop(1) = {4, 1, 2, 3};
//+
Line Loop(2) = {7, -6, -5};
//+
Plane Surface(1) = {1, 2};
```

```
essai.geo - Bloc-notes
Fichier Edition Format Affichage Aide
//+
Point(4) = {0, 5, 0, 0.25};
//+
Point(5) = {3, 2, 0, 0.25};
//+
Point(6) = {2, 2, 0, 0.25};
//+
Point(7) = {1, 2, 0, 0.25};
//+
Line(1) = {1, 2};
//+
Line(2) = {2, 3};
//+
Line(3) = {3, 4};
//+
Line(4) = {4, 1};
//+
Line(5) = {5, 6};
//+
Line(6) = {6, 7};
//+
Circle(7) = {5, 6, 7};
//+
Line Loop(1) = {4, 1, 2, 3};
//+
Line Loop(2) = {7, -6, -5};
//+
Plane Surface(1) = {1, 2};
Ln 1 100% Windows (CRLF) UTF-8
```

Pour notre exemple de section la figure-3.4.6 affiche le résultat graphique ainsi que l'état du script de commandes qui lui correspond.

La déclaration d'une surface comporte deux temps : la déclaration des contours (Loop) puis la déclaration de la surface (Plane surface). Pour notre exemple la syntaxe indiquée dans le script est :

```
Loop(1)={4,1, 2, 3};
Loop(2)={7, -6, 5};
Plane Surface={1, 2};
```

Dans Loop(2) le signe - avant 6 indique que le contour doit parcourir la ligne 6 en sens inverse (par rapport à la déclaration de ses deux points).

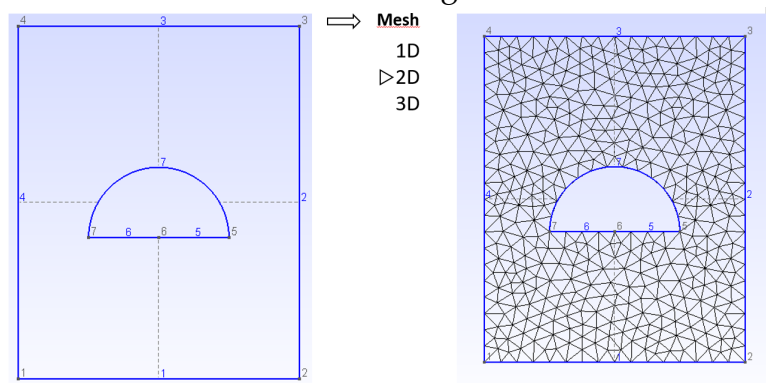
3.4.2 Le maillage de la section

La géométrie de la section présente plusieurs lignes de contour (1D) et une seule surface (2D).

La commande Mesh ▷2D permet de réaliser le maillage automatique (en triangles) de la géométrie de la section; cette opération conduit à (figure-3.4.7) :

- le maillage par EF-2D de sa surface en triangles (par défaut)
- et implicitement au maillage de ses lignes de contours en EF-1D.

FIGURE 3.4.7 – Maillage de la section

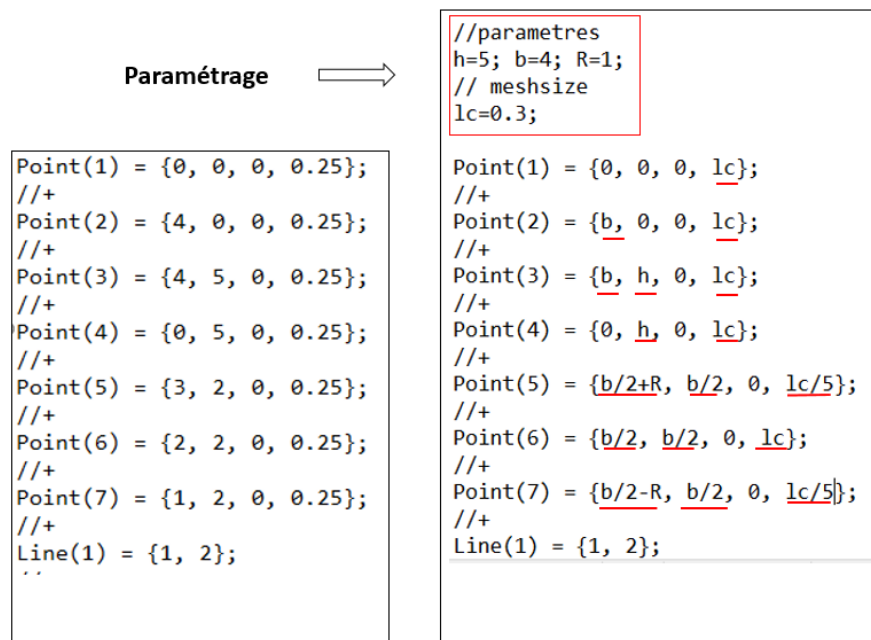


3.4.3 Modification et paramétrage de la section

Modification du script de commandes

Il est possible (et relativement pratique) pour modifier une géométrie d'intervenir dans le fichier exemple.geo et de modifier le script de commandes qu'il contient. Cette opération est extérieure à **Gmsh**; elle peut se faire avec un simple éditeur de texte. Le cas échéant, une fois le fichier modifié et sauvegardé, il est nécessaire sous **Gmsh** de recharger le fichier (modifié) via la commande Reload script prévue à cet effet.

FIGURE 3.4.8 – Modifications du script de commandes



Pour écrire un script de commandes, **Gmsh** offre un langage de programmation (relativement simple) comme on aura pu le constater pour les déclarations des points, des lignes, ... etc. Tel que décrit dans la documentation de **Gmsh**, ce langage offre pratiquement toutes les commandes nécessaires à l'obtention de géométries et de maillages relativement complexes : on y trouvera les différentes instructions courantes de programmation telles que : l'affectation de variable, les différentes opérations mathématiques, l'utilisation des fonctions, les boucles, les tests, ...etc. Pour ce qui nous concerne, on montre ci-dessous comment, par l'introduction de quelques variables dans le script de commandes, on peut *paramétrer* la géométrie de la section ou *affiner* le maillage autour d'un point.

Paramétrage de la géométrie et du maillage

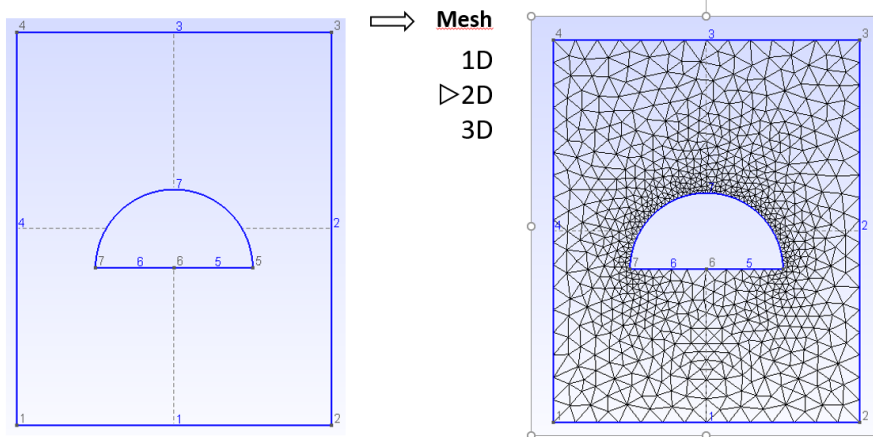
Il est possible, dans le script de commandes, d'affecter des valeurs à des variables et les utiliser pour déclarer la géométrie. Pour l'exemple, la figure-3.4.8 montre les deux versions du script de commandes : avant (gauche) et après paramétrage (droite).

Dans la version paramétrée, les variables h , b et R ont été utilisées pour déclarer les coordonnées des points, et la variable lc (fixée à 0.3) pour préciser la taille du maillage autour de chaque point (P_{msp}). Utilisée pour tous les points, cette valeur a été divisée par 5 pour les points 5 et 6, afin d'obtenir un maillage plus fin autour de ces deux points .

A l'aide de cette version *paramétrée* du script, il devient possible d'obtenir différentes géométries et maillages.

La figure-3.4.9 montre le résultat obtenu avec la nouvelle version du script.

FIGURE 3.4.9 – Maillage de la section



3.4.4 L'exportation du maillage de la section vers CSB

Une fois réalisé, le maillage de la section doit être exporté (File \triangleright Export) au format Abaqus INP (*.inp) proposé dans **Gmsh** pour qu'il puisse être importé par le module de calcul de section de **CSB**.

Pour que ce fichier soit enregistré sous le nom `exemple.inp`, il peut ne pas suffire de taper pour nom de fichier `exemple` (pour un ajout automatique de `.inp`) mais explicitement `exemple.inp`.

3.4.5 Autres commandes utiles pour la géométrie

Trois commandes sont proposées via Geometry \triangleright Elementary entities \triangleright Transform :

Translate pour translater tout ou partie d'un dessin selon un vecteur dont il faut préciser les valeurs DX, DY, et DZ

Rotate pour tourner tout ou partie d'un dessin par rapport à un axe de direction (DX, DY, DZ) passant par un point (X, Y, Z) et selon un angle (en radian)

Symmetry pour obtenir la partie symétrique de tout ou partie d'un dessin selon une symétrie plane précisée par les 4 paramètres A, B, C, et D de l'équation du plan ($Ax+By+Cz+D=0$).

Leur fonctionnement étant similaire ; on se limitera à donner un exemple de rotation.

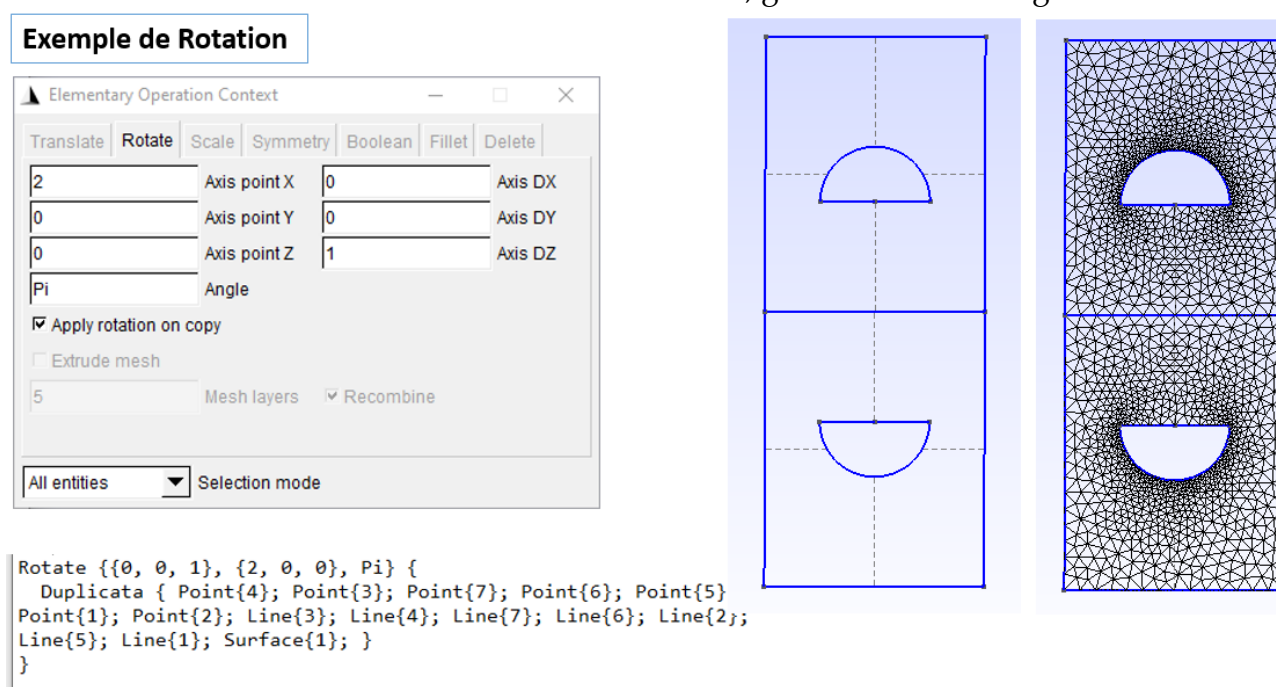
En mode interactif, la commande **Rotate** affiche une fenêtre dans laquelle doivent être précisés :

- les paramètres qui définissent la rotation
- les entités géométriques auxquelles doit s'appliquer la rotation (toutes par défaut).

Il faut par ailleurs indiquer si (les entités de) la géométrie de départ doit être conservée.

Une rotation a été effectuée pour toute la géométrie de la section dont le maillage a été affiné (figure-3.4.9). La figure-3.4.10 montre (à gauche) la fenêtre associée à la commande rotation

FIGURE 3.4.10 – Fenêtre de Rotation, géométrie et maillage



pour laquelle les données sont (0, 0, 1) pour l'axe, (2, 0, 0) pour le point et Pi pour l'angle; cette figure montre la géométrie et le maillage obtenus et donne aussi (en bas à droite) la syntaxe de la commande Rotate telle que extraite du script de commandes contenu dans exemple.geo.

3.5 Dessin et maillage d'une structure plane ou spatiale

Pour **CSB**, une structure de poutres est géométriquement formée de lignes droites connectées entr'elles par des points (les nœuds d'assemblage de la structure).

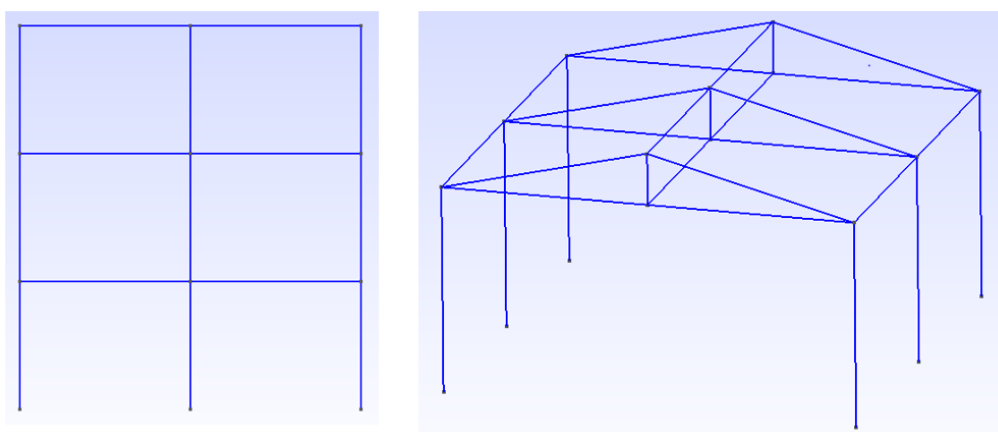
Sous **Gmsh**, l'obtention d'une structure (figure-3.5.1) plane (2D) ou spatiale (3D) pourra être réalisée en n'utilisant que les commandes Point et Line puis éventuellement les commandes de Transform. Pour une structure dans le plan, destinée à **CSB**, la structure doit se trouver dans le plan (X,Y). Les points auront donc *impérativement* une coordonnée nulle selon Z.

Une fois la structure obtenue, son maillage (1D) sera exporté au format .inp comme cela a été le cas pour la section.

Quant à la finesse du maillage (1D), elle est *sans importance* pour **CSB**¹.

1. Pour les structures de poutres, **CSB** assure de manière interne le maillage en EF-1D; cependant la structure réalisée avec **Gmsh** nécessite quand même un maillage pour que le fichier.inp soit généré.

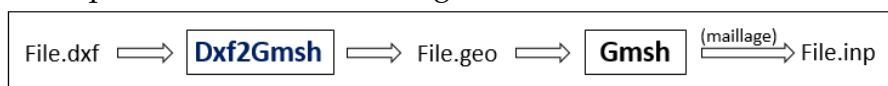
FIGURE 3.5.1 – Structure plane ou spatiale



3.6 Dessin réalisés avec d'autres logiciels de DAO

Dans **CSB**, il est possible d'exploiter des dessins réalisés avec des logiciels de DAO s'ils sont sauvegardés au format .dxf :

- Pour une structure plane ou spatiale, l'importation du fichier au format .dxf peut directement se faire par **CSB** ; le maillage en EF-1D étant interne à **CSB**.
- Pour une section, le dessin au format .dxf ne contient que la *géométrie* de la section ou plus précisément les contours de la section. Il est donc nécessaire que les surfaces puissent être déclarées puis mailler en EF-2D. Pour cela, **CSB** propose un utilitaire **Dxf2Gmsh** permettant de convertir le fichier.dxf en un fichier.geo (soit un script de commandes) exploitable par **Gmsh**. Il restera alors à l'utilisateur de finir, dans **Gmsh**, la déclaration de la géométrie de la section dont en particulier la définition des surfaces, puis à effectuer le maillage.



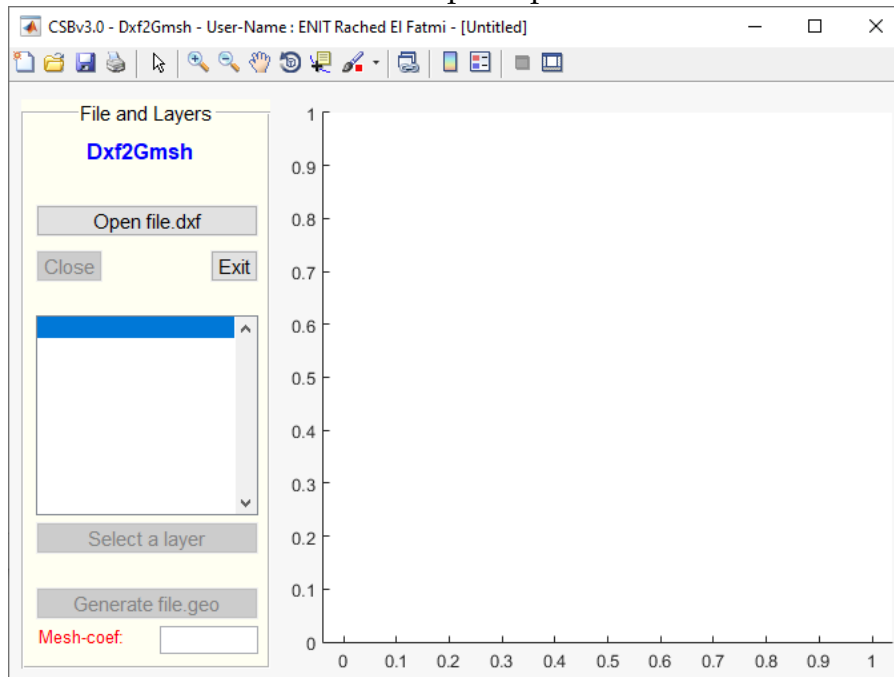
La présentation de l'utilitaire **Dxf2Gmsh** est donnée ci-après.

3.7 L'utilitaire Dxf2Gmsh

Important. Un fichier.dxf est généralement formé de plusieurs calques (layers). Pour **Dxf2Gmsh**, le dessin d'une section doit se trouver entièrement dans *un même calque*; et il est possible qu'un fichier.dxf contienne plusieurs dessins de sections, mais *une section par calque*. Par ailleurs **Dxf2Gmsh** ne lit pas toutes les entités graphiques d'un fichier.dxf, mais uniquement les lignes droites ou circulaires; cela implique que les contours d'une section ne peuvent être formés que par des segments droits et des arcs de cercle.

Dxf2Gmsh peut être lancé via la fenêtre principale de **CSB**. La figure-3.7.1 montre sa fenêtre principale.

FIGURE 3.7.1 – Fenêtre principale de Dxf2Gmsh



Open file.dxf permet d'ouvrir un fichier.dxf et d'afficher tous les dessins que contiennent les différents calques.

Select a layer permet de sélectionner un calque particulier et de n'afficher que le dessin qu'il contient.

Generate file.geo permet de générer le fichier fichier.geo (script de commandes) pour Gmsh.

Mesh-coef propose une case dans laquelle est insérée automatiquement une valeur (par défaut) dès la sélection du calque. Cette valeur que l'utilisateur peut changer, avant la génération du fichier.geo, est celle qui définit la taille du maillage autour d'un point (Pmsp) et qui sera affectée à tous les points contenus dans le script de commandes. Cette affectation se fait via un seul paramètre noté lc, placé en tête du script; il sera ainsi facile, éventuellement, de le modifier.

La figure-3.7.2 montre les affichages après l'ouverture d'un fichier.dxf. On notera qu'il contient plusieurs calques (ici chaque calque contient le dessin d'une section).

La figure-3.7.3 montre l'affichage après la sélection d'un calque contenant une section qui présente plus d'un sous domaine (ou surface).

La figure-3.7.4 montre (après ouverture dans Gmsh du fichier.geo qui a été généré) la géométrie obtenue et le maillage qui a été exécuté après avoir précisé les différentes surfaces (ici 3 surfaces).

FIGURE 3.7.2 – Ouverture d'un fichier.dxf et affichage de tous les calques.

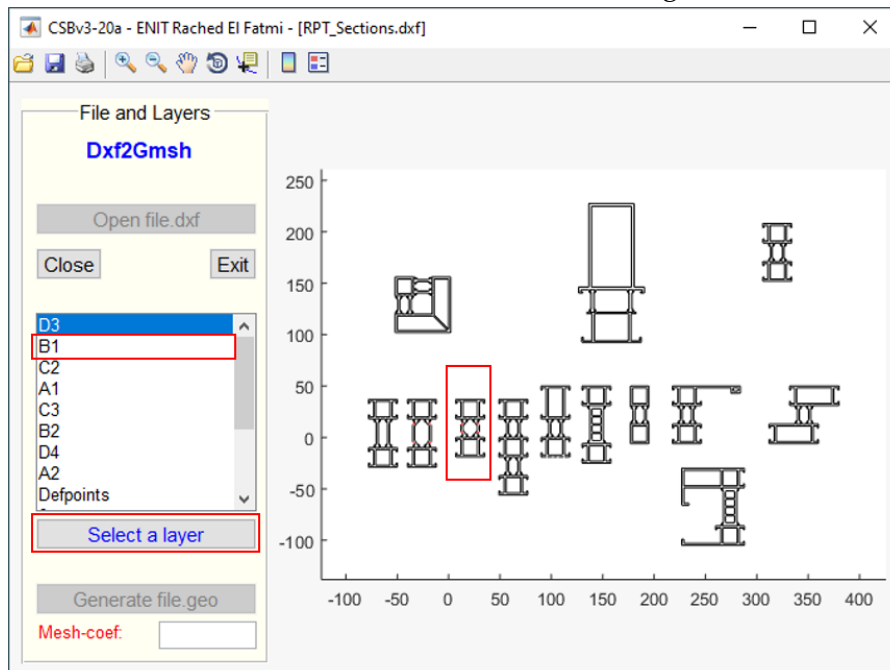


FIGURE 3.7.3 – Affichage du dessin du calque B1

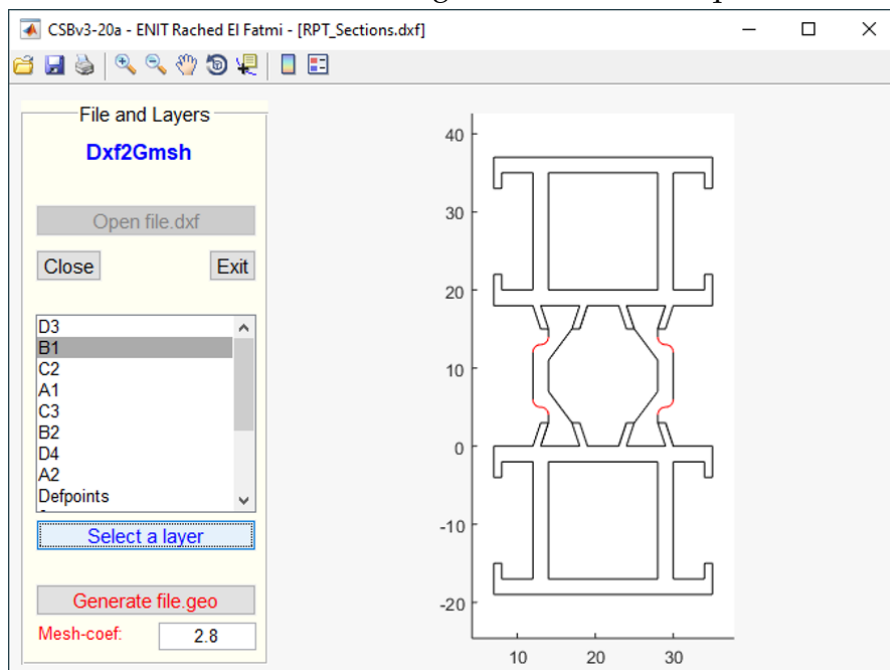
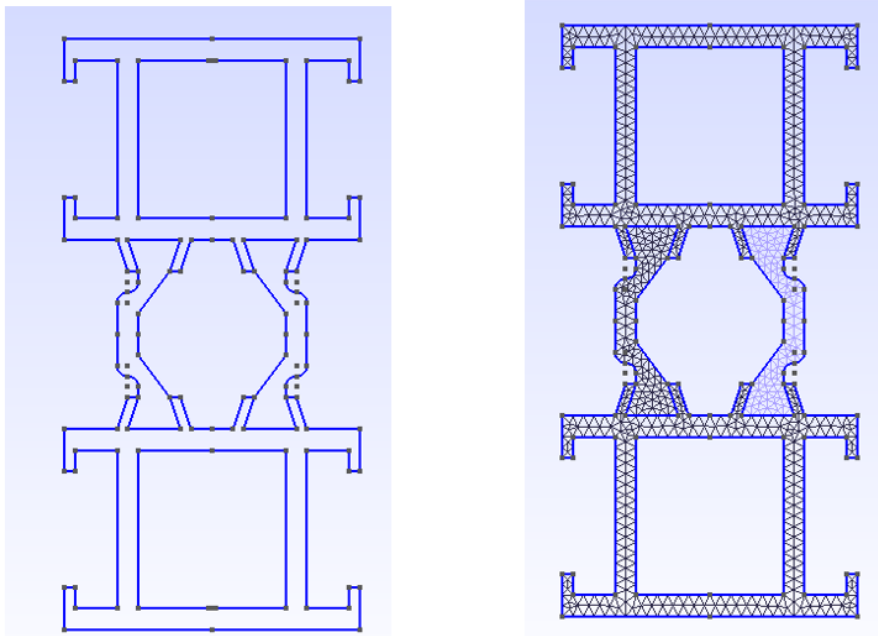


FIGURE 3.7.4 – Finalisation de la géométrie et maillage dans **Gmsh**



Chapitre 4

L'utilitaire Materials

Sommaire

4.1	Introduction	39
4.2	Les différents types de matériaux	39
4.2.1	Matériau isotrope	39
4.2.2	Matériau orthotrope	39
4.2.3	Matériau isotrope transverse	40
4.3	L'utilisation de Materials	41
4.3.1	L'interface de Materials	41
4.3.2	Déclaration d'un matériau	42

4.1 Introduction

CSB propose, par défaut, des listes de matériaux. **Materials** est un utilitaire permettant à l'utilisateur de consulter ou de modifier les listes de matériaux proposées par défaut ou de créer (et sauvegarder) de nouvelles listes de matériaux.

Trois types de matériaux peuvent être déclarés :

- isotrope
- isotrope transverse
- orthotrope

Même si une liste de matériaux peut contenir tous les types, il est recommandé de créer des listes par type de matériau.

Chaque matériau est défini par son nom, sa masse volumique, ses constantes élastiques, ses constantes thermiques ou thermo-mécaniques, et les constantes relatives à son seuil élastique. Dans la déclaration d'un matériau, ne sont obligatoire que la masse volumique et les constantes élastiques .

Avant de donner le mode d'emploi de **Materials**, on précisera les constantes qu'il faut définir pour chaque type de matériau (les unités sont imposées).

4.2 Les différents types de matériaux

4.2.1 Matériau isotrope

Un matériau isotrope est défini par :

- ρ la masse volumique (kg/m^3)
- E le module de Young (MPa)
- ν le coefficient de Poisson
- λ la conduction thermique ($10^{-5}^\circ C$)
- α la constante de dilatation élastique ($W/m^\circ C$)
- σ^e la limite élastique (MPa)

4.2.2 Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope est défini par :

- 9 constantes élastiques
 E_{XX}, E_{YY}, E_{ZZ} les modules de Young
 $\nu_{XY}, \nu_{XZ}, \nu_{YZ}$ les coefficients de Poisson
 G_{XY}, G_{XZ}, G_{YZ} les modules de cisaillements

où (X, Y, Z) sont relatifs aux directions des axes matériels. Ces 9 constantes sont celles qui apparaissent dans le triangle inférieur de la matrice de souplesse du matériau (Loi de Hooke) qui exprime les déformations en fonctions des contraintes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{XX}} & \frac{\nu_{YX}}{E_{YY}} & \frac{\nu_{ZX}}{E_{ZZ}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{XY}}{E_{XX}} & \frac{1}{E_{YY}} & \frac{\nu_{ZY}}{E_{ZZ}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{XZ}}{E_{XX}} & \frac{\nu_{YZ}}{E_{YY}} & \frac{1}{E_{ZZ}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{YZ}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{XZ}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{XY}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

- 6 constantes thermo-mécaniques
 $\lambda_X, \lambda_Y, \lambda_Z$, les conductions thermiques
 $\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z$, les constantes de dilatation thermique
- 6 constantes seuils relatives au critère de Tsai-Hill
 $\sigma_X^e, \sigma_Y^e, \sigma_Z^e$, les contraintes normales limites
 $\tau_{XY}^e, \tau_{XZ}^e, \tau_{YZ}^e$, les cisaillements limites

Les unités pour chaque type de constante sont celles précisées pour le cas isotrope.

4.2.3 Matériau isotrope transverse

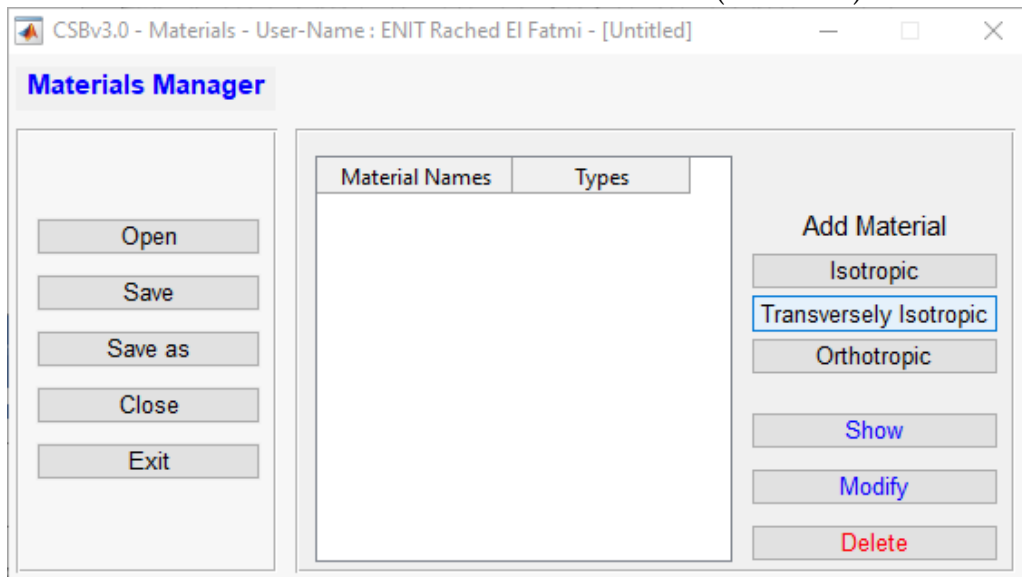
Un matériau isotrope transverse est défini par :

- 5 constantes élastiques
 E_L, E_T , les modules de Young
 ν_{LT} , le coefficient de Poisson
 G_{LT}, G_{TT} , les modules de cisaillement

Ces constantes correspondent au cas particulier orthotrope pour lequel X correspond à la direction longitudinale L , et où les directions transverses (Y, Z) sont équivalentes.

- 4 constantes thermo-mécaniques
 λ_L, λ_T les conductions thermiques
 α_L, α_T les constantes de dilatation thermiques
- 6 constantes seuils relatives au critère de Tsai-Hill
 σ_L^e, σ_T^e les contraintes normales limites
 τ_{LT}^e, τ_{TT}^e , les cisaillements limites

FIGURE 4.3.1 – Interface de Materials (liste vide)



4.3 L'utilisation de Materials

4.3.1 L'interface de Materials

L'utilitaire **Materials** peut être lancé depuis la fenêtre principale de **CSB**. La figure-4.3.1 montre l'interface de **Materials**, et la figure-4.3.2 montre cette même fenêtre après avoir ouvert (**Open**) un fichier contenant la liste de matériaux (isotropes) proposée par défaut.

Il est possible de créer une nouvelle liste de matériaux et de la sauvegarder dans un fichier, ou d'ouvrir un fichier contenant une liste de matériaux pour la consulter ou la modifier.

Les actions associées aux différents boutons présents dans l'interface de **Materials** sont décrites ci-dessous :

Open pour ouvrir et afficher la liste des matériaux contenu dans un fichier.

Save / Save-as pour sauvegarder la liste des matériaux dans un fichier

Close / Exit pour fermer un fichier ouvert ou pour quitter **Materials**

Isotropic pour ajouter un matériau isotrope

Tranversely Isotropic pour ajouter un matériau isotrope transverse

Orthotropic pour ajouter un matériau orthotrope

Show pour afficher les caractéristiques d'un matériau *sélectionné* dans la liste des matériaux affichés.

Modify pour modifier les caractéristiques d'un matériau *sélectionné* dans la liste des matériaux affichés.

Delete pour éliminer (effacer) un matériau *sélectionné* de la liste des matériaux affichés.

FIGURE 4.3.2 – Interface de Materials : une liste de matériaux

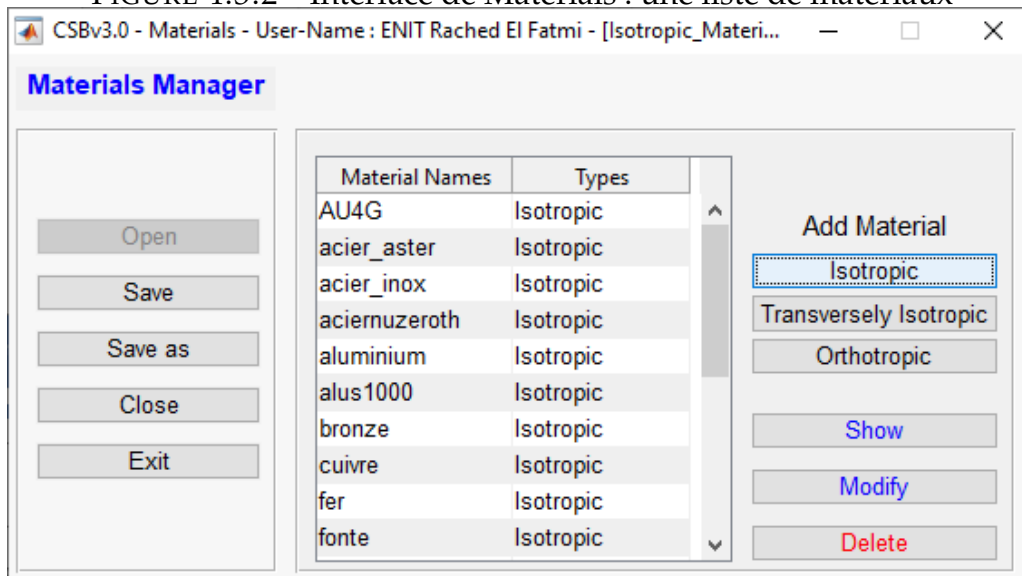
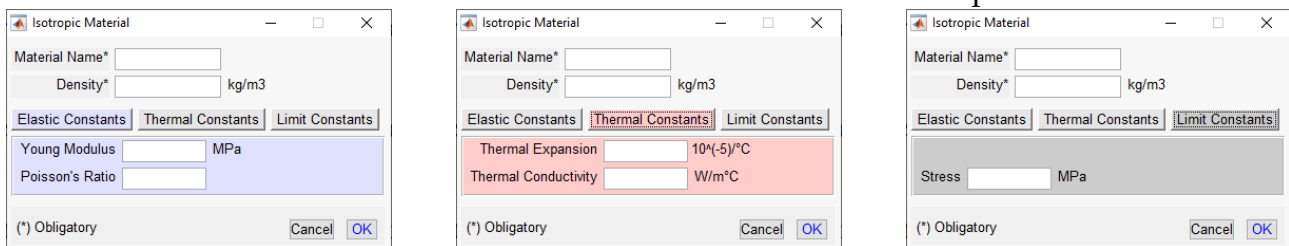


FIGURE 4.3.3 – Déclaration d'un matériau isotrope



4.3.2 Déclaration d'un matériau

On donne pour exemple la déclaration d'un matériau de type isotrope, les deux autres types fonctionnent de manière similaire.

Le bouton *Isotropic* affiche une fenêtre (à gauche, dans figure-4.3.3) qui permet de déclarer les données *obligatoires* : le nom du matériau (son identifiant) , la masse volumique et les constantes élastiques.

Un matériau est identifié par son nom; celui-ci est alpha-numérique, commence par une lettre, peut comporter le caractère « _ » (underscore), et les blancs sont interdits.

Les deux autres fenêtres de la figure-4.3.3 sont relatives aux onglets permettant, respectivement, de déclarer les constantes thermiques et les constantes limites.

Chapitre 5

Le module CSection

Sommaire

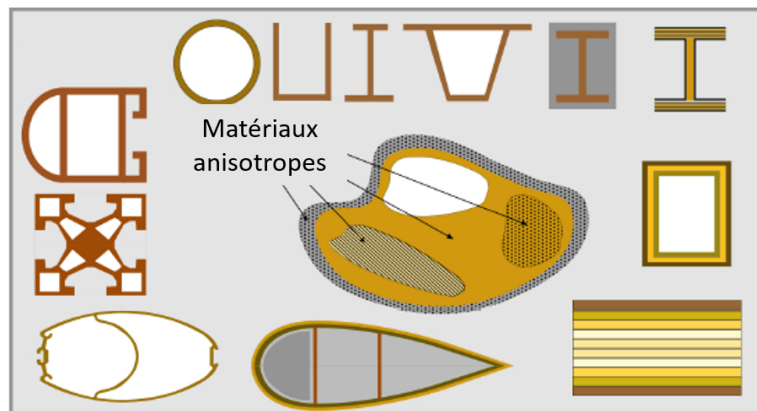
5.1	Introduction	44
5.2	Notations de poutre	46
5.3	Les Caractéristiques Mécaniques de Section	47
5.3.1	Comportement (1D) et constantes de section	47
5.3.2	Autres caractéristiques de section	47
5.3.3	En résumé	48
5.4	Les caractéristiques calculées par CSection	48
5.4.1	Centres, axes et constantes de section	48
5.4.2	Champs de contraintes de section	49
5.4.3	Modes de déformation de section	51
5.5	L'utilisation de CSection	53
5.5.1	L'interface de CSection	53
5.5.2	La barre des menus	54
5.5.3	Les boutons de la zone graphique	55
5.6	La déclaration des données	55
5.6.1	L'importation d'une géométrie de section	55
5.6.2	L'affectation des matériaux à la section	56
5.6.3	L'orientation des matériaux anisotropes	57
5.6.4	Les options de calcul	59
5.6.5	Les conditions de température pour un calcul thermique	60
5.7	Les calculs et les résultats	61
5.7.1	Caractéristiques Mécaniques de Section	61
5.7.2	Solution thermique	64
5.8	L'édition des données et des résultats	65

5.1 Introduction

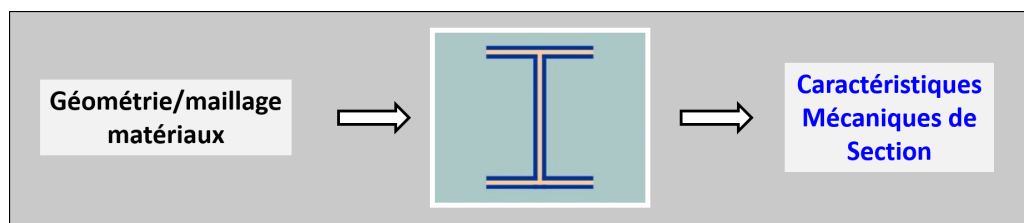
Le module **CSection** assure le calcul *exact* (voir plus loin le paragraphe encadré) des Caractéristiques Mécaniques d'une Section (**CMS**) homogène ou composite quelconque (figure-5.1.1) :

- de forme pleine, mince ou épaisse, fermée ou ouverte, simplement ou multiplement connexe, symétrique ou pas ;
- et constituée de matériaux isotropes ou anisotropes, librement agencés.

FIGURE 5.1.1 – Sections homogènes ou composites.



Ce calcul est effectué par éléments finis (EF-2D) sur la section, de manière systématique, à partir des données de section qui se résument à sa géométrie et aux matériaux qui la constituent.



Les **CMS**, que **CSection** détermine, sont celles décrites dans l'Annexe-A dédié à la présentation de la version *exacte* de la théorie *classique* des poutres. Ces **CMS**, qui ne se résument pas aux seules constantes de section (aire, moments d'inerties, constante de torsion, ...) sont nécessaires aux modules de calculs de poutres de **CSB**.

Important. Les **CMS** sont celles associées à la version *exacte* de la théorie *classique* des poutres ; c'est à dire celles dont le calcul

- s'affranchit de toutes les hypothèses généralement consenties pour les poutres ;
- et ne passe pas par une étape d'homogénéisation des matériaux de la section pour le cas composite ;

Dans **CSection**, le calcul de ces **CMS** est effectué selon une méthode numérique [El Fatmi and Zenzri, 2002] qui permet de déduire toutes les **CMS** d'une section quelconque, de la résolution d'une série de problèmes élastiques posés uniquement sur la section, et traités par éléments finis 2D.

Les **CMS** ainsi déterminées peuvent être considérées comme *exactes*.

Autres calculs dans CSection Mis à part le calcul des **CMS**, le module **CSection** offre aussi des *calculs thermiques* 2D menés sur la section. Ces calculs fournissent le champ de température solution pour des conditions de température (conduction, convection) quelconques imposées sur la frontière de la section. Ces calculs thermiques sont utiles pour l'analyse correcte des effets de la température dans le module **Spatial Beam**, quand la résolution se fait selon la méthode de calcul *avancée* (**RBT**).

Géométrie de section. Le calcul des **CMS** s'effectuant par éléments finis sur la section, il nécessite que la section ait été géométriquement définie et maillée en EF-2D, mais **CSB** n'offre pas d'outil de dessin et de maillage.

L'utilisateur est invité à réaliser le dessin d'une section (géométrie) et son maillage via le générateur de maillage **Gmsh** (open source), puis à *importer* la section maillée dans **CSection**, pour qu'elle puisse être traitée.

L'utilisateur trouvera, dans le chapitre-3, un guide d'utilisation de **Gmsh** limité aux besoins de **CSB**.

Matériaux de section. Une section peut présenter un ou plusieurs sous domaines (surfaces), selon qu'on envisage une section homogène ou hétérogène. La déclaration des matériaux de la section se fait dans **CSection**, un matériau par sous domaine.

Trois types de matériau peuvent être utilisés : *isotrope*, *isotrope transverse* et *orthotrope*. **CSection** propose des listes de matériaux par défaut ; l'utilisateur peut les modifier ou créer ses propres listes de matériaux à l'aide de l'utilitaire **Materials** dont la présentation est donnée au chapitre-4.

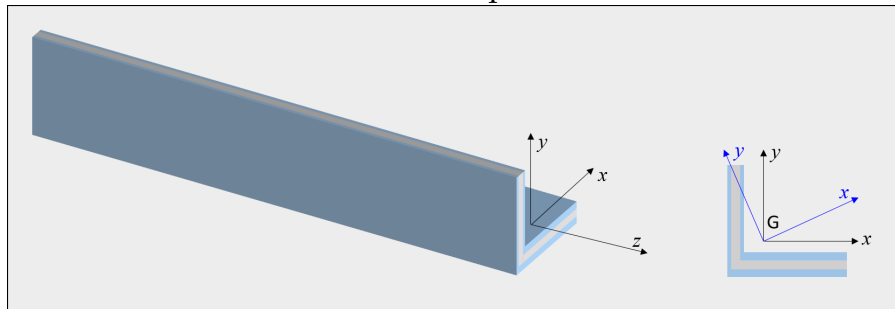
Le contenu de ce chapitre. Ce chapitre peut être considéré comme le *manual d'utilisation* de **CSection**, on y présente de manière détaillée :

- pour le calcul des **CMS**, la déclaration d'une section et les différents résultats que le module fournit ;

- pour les calculs thermiques, la déclaration des conditions de conduction ou de convection à imposer à la section, puis le résultat que le module fournit et qui se traduit par le champ de température à l'équilibre.

Mais avant de décrire l'utilisation de **CSection**, il est important de rappeler ce que sont précisément les **CMS** pour une section quelconque (Annexe-A).

FIGURE 5.1.2 – Axes de poutre et de section



5.2 Notations de poutre

Centres et axes de section. Dans **CSection**, la poutre est d'axe z (figure-5.1.2). Quant aux axes de la section, on distingue :

$[x, y]$ les axes naturels de la section ; ils correspondent aux repère que l'utilisateur a choisi pour déclarer la géométrie de la section

$[x, y]$ les axes d'inertie de la section

Pour une section hétérogène quelconque, il y a *plusieurs* centres de section :

G_g le centre *géométrique*, qui ne dépend que de la forme de la section

G_m le centre de *masse*, qui dépend de l'agencement des matériaux dans la section et de leur masse volumique

G_e le centre *élastique* , dont la position dépend de l'agencement des matériaux dans la section et de leurs caractéristiques mécaniques

Pour le cas homogène, ces 3 centres sont confondus en un seul point qu'il est d'usage de désigner par centre d'*inertie*, et de le noter simplement G .

Efforts intérieurs, mouvements et déformations. Au droit d'une section, les efforts intérieurs sont notés :

- T_x : l'effort tranchant selon x
- T_y : l'effort tranchant selon y
- N : l'effort normal selon z
- M_x : le moment de flexion / x
- M_y : le moment de flexion / y
- M_t : le moment de torsion

Ces efforts intérieurs sont reliés aux déformations associées par loi de comportement (1D) défini par les relations :

$$\begin{bmatrix} u'_x - \omega_y \\ u'_y + \omega_x \\ u'_z \\ \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = [\Lambda_{sv}] \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_t \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_t \end{bmatrix} = [\Gamma_{sv}] \begin{bmatrix} u'_x - \omega_y \\ u'_y + \omega_x \\ u'_z \\ \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} \quad \left([\Lambda_{sv}] = [\Gamma_{sv}]^{-1} \right)$$

où

$[u_x, u_y, u_z]$ et $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ sont, respectivement, les composantes de translation et de rotation de la section, et où l'exposant (') désigne la dérivée par rapport à z .

L'opérateur Λ_{sv} , qui se traduit par une matrice 6x6, définit le comportement de la poutre en terme de souplesse. Cet opérateur qui ne dépend que de la nature de la section (forme et matériaux) constitue une *caractéristique* de la section.

5.3 Les Caractéristiques Mécaniques de Section

5.3.1 Comportement (1D) et constantes de section

On peut déduire (voir Annexe-A.5.1) les constantes classiques de section (l'aire, les moments d'inerties, la constante de torsion, ...) des composantes de l'opérateur de comportement Λ_{sv} . Cependant, les CMS, telles que définies dans l'Annexe-A, ne s'arrêtent pas à la détermination de l'opérateur de comportement, et des constantes de section qu'il contient.

Il existe d'autres caractéristiques de section, qu'on n'a pas l'habitude d'évoquer et qui constituent autant d'informations sur la Mécanique d'une section, et que les modules de calculs de CSB exploitent.

5.3.2 Autres caractéristiques de section

Champs de contraintes de section. Il est établi, qu'à l'équilibre d'une poutre, loin des bords, la solution 3D intérieure est donnée par la solution 3D de Saint Venant, et que celle-ci est linéaire par rapport aux 6 efforts intérieurs. Cette propriété de linéarité se traduit par un champ de contraintes qui s'écrit :

$$\sigma_{sv}(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 X_i(z) \sigma^i(x, y) \quad \text{avec} \quad X_i \in \{T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_t\}$$

où, les 6 champs de contrainte $\sigma^i(x, y)$, associés à chacun des 6 efforts intérieurs (X_i), ne dépendent que de la section, et non du problème de poutre considéré.

Cela signifie que chaque effort intérieur (X_i) contribue au champ de contrainte σ_{sv} , par un champ de contrainte σ^i qui lui est propre et qui ne dépend que de la nature de la section. Ces 6 champs de contraintes types $\{\sigma^i\}$ sont aussi considérés comme *des caractéristiques* de la section. Des illustrations en sont données plus loin.

Modes de déformations de section. Il est de même établi, que la *déformation* d'une section est aussi linéaire par rapport aux 6 efforts intérieurs (X_i), et cela signifie que chaque effort intérieur (X_i) contribue à la déformation de la section via un champ de déplacement particulier, qu'on note $M^i(x, y)$, et qui ne dépend que de la section et non du problème de poutre considéré. Ces 6 champs de déplacement, ou bien ces 6 modes de déformation de section $\{M^i\}$ sont aussi *des caractéristiques* de la section. Des illustrations en sont données plus loin.

5.3.3 En résumé

En définitive les CMS, sont $[\Lambda_{sv}, \sigma^i, M^i]$:

- Λ_{sv} (ou bien son inverse Γ_{sv}) l'opérateur de comportement de la poutre qui, pratiquement, se traduit par une matrice 6x6, et dont on peut déduire toutes les *constantes classiques* de section.
- et pour chacun des 6 efforts intérieurs $\{T_x^e, T_y^e, N^e, M, M_y^e, M_t^e\}$:
 - $\sigma^i(x, y)$, un champ de contraintes particulier pour la section
 - $M^i(x, y)$, un mode de déformation particulier pour la section

Elles constituent autant d'informations sur la *Mécanique* de la section, compte tenu de sa forme et des matériaux qui la constituent.

Toutes ces caractéristiques de section $[\Lambda_{sv}, \sigma^i, M^i]$
(et pas seulement les constantes de section) sont utiles aux autres modules de CSB pour mener les calculs de poutres de manière performante.

5.4 Les caractéristiques calculées par CSection

5.4.1 Centres, axes et constantes de section

Pour une section quelconque, CSection détermine :

- les positions du centre G (pour le cas homogène, en fait G_e) ou des centres $\{G_g, G_m, G_e\}$ pour le cas hétérogène

- la position des axes d'inertie (x, y) de section par rapport à ses axes naturels (x, y)
- la position du centre de cisaillement C (ou de torsion)
- les matrices (6x6) des opérateurs (souplesse ou rigidité) de comportement
 - Λ_{sv} et Γ_{sv} , en référence à $[G_e, x, y, z]$
 - Λ_{sv} et Γ_{sv} en référence à $[G_g, x, y, z]$

Quant aux constantes de section, **CSection** fournit :

- pour le cas homogène isotrope, les constantes classiques de section

A	l'aire de la section
I_x, I_y	les moments d'inertie de la section par rapport aux axes x et y ;
J	la constante de torsion
A_x, A_y	les sections réduites d'effort tranchant; ($A_x = k_x, A_y = k_y A$) $< A$. ainsi que la constante de gauchissement de torsion I_ω (dont le calcul se déduit du gauchissement de la section associé au moment de torsion).

- pour le cas composite, uniquement les rigidités associées aux différentes sollicitations et notées par analogie au cas homogène isotrope :

$\widehat{GA}_x, \widehat{GA}_y$	les rigidités d'effort tranchant
\widehat{EA}	la rigidité à l'effort normal
$\widehat{EI}_x, \widehat{EI}_y$	les rigidités de flexion
\widehat{GJ}	la rigidité de torsion

Attention, il s'agit de *notations* dont les formes ne sont pas *séparables*! Par exemple \widehat{EA} ne constitue pas la multiplication de E par A (comme dans le cas homogène isotrope); on n'est plus en présence d'un seul matériau!

5.4.2 Champs de contraintes de section

Pour une section quelconque, **CSection** fournit, les 6 champs de contraintes σ^i (associés aux 6 efforts intérieurs). Pour chaque σ^i , le résultat est en donné pour *chacune* de ses composantes.

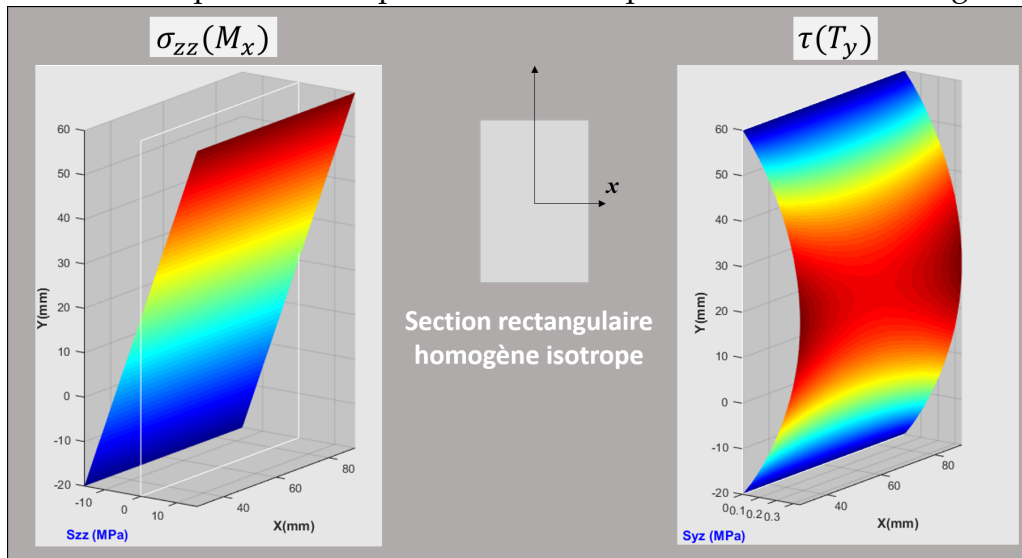
$$\sigma^i(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Important : les champs de contraintes sont fournis pour des efforts intérieurs définis en référence à $[G_g, x, y, z]$ et non en référence au repère central principal d'inertie $[G_e, x, y, z]$.

Cas d'une section homogène isotrope. Pour illustration, la figure-5.4.1 montre deux champs de contraintes pour une section rectangulaire homogène isotrope :

- à gauche, la variation des contraintes axiale σ_{zz} dues à un moment de flexion M_x ; elle indique comme attendu une variation linéaire selon y ;
- à droite, la variation du (module de) cisaillement $\tau = \sigma_{xz}x + \sigma_{yz}y$ dû à un effort tranchant T_y , dont la forme apparaît quasi-parabolique.

FIGURE 5.4.1 – Exemples de champs de contraintes pour une section homogène isotrope.

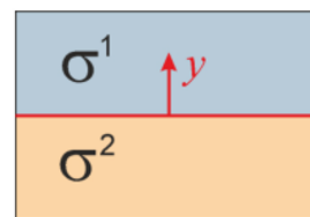


Cas d'une section hétérogène. Pour le cas hétérogène ou composite, un champ de contrainte est fourni (ou affiché) *par sous domaine*, c'est à dire *par matériau*. Ainsi pour un point à l'interface entre deux matériaux, deux valeurs seront fournies. A l'interface, la continuité des contraintes dépend de l'orientation de l'interface.

Par exemple (figure ci-contre), si l'interface entre les sous-domaines 1 et 2 a pour normale y , la continuité exige que $\sigma^1(y) = \sigma^2(y)$; soit

$$\left[\sigma_{xy}^1, \sigma_{yy}^1, \sigma_{yz}^1 \right] = \left[\sigma_{xy}^2, \sigma_{yy}^2, \sigma_{yz}^2 \right]$$

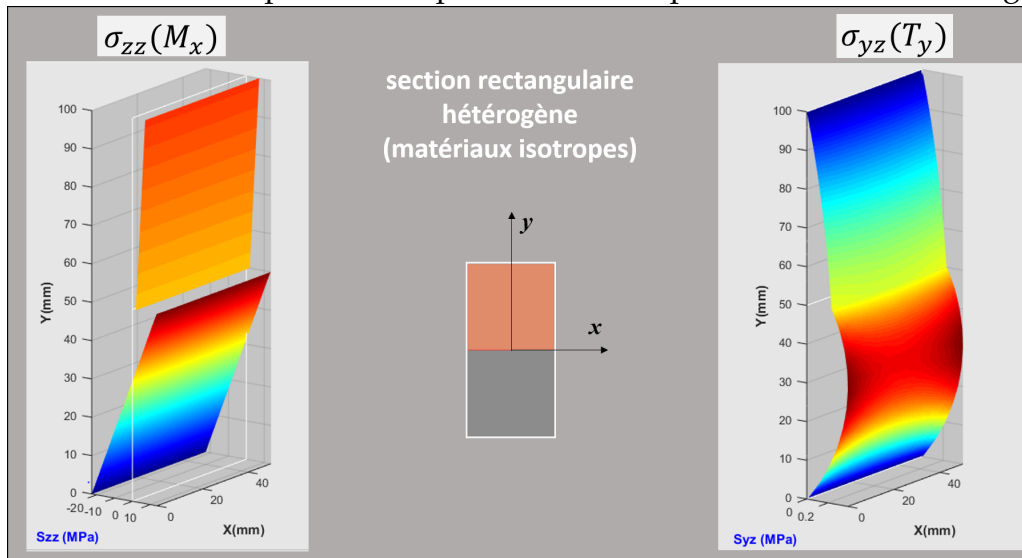
les autres composantes peuvent être discontinues !



Pour illustration, la figure-5.4.2 montre deux champs de contraintes pour une section rectangulaire hétérogène constituée de deux matériaux isotropes :

- à gauche, la variation des contraintes axiale σ_{zz} dues à un moment de flexion M_x ; elle indique une variation linéaire par morceau (selon y); et la contrainte apparaît discontinue à l'interface et c'est normal.
- à droite, la variation de la contrainte de cisaillement σ_{yz} dû à un effort tranchant T_y ; cette contrainte de cisaillement apparaît continue à l'interface et cela est significatif de la *qualité* des résultats fournis par **CSection**.

FIGURE 5.4.2 – Exemple de champ de contraintes pour une section hétérogène.



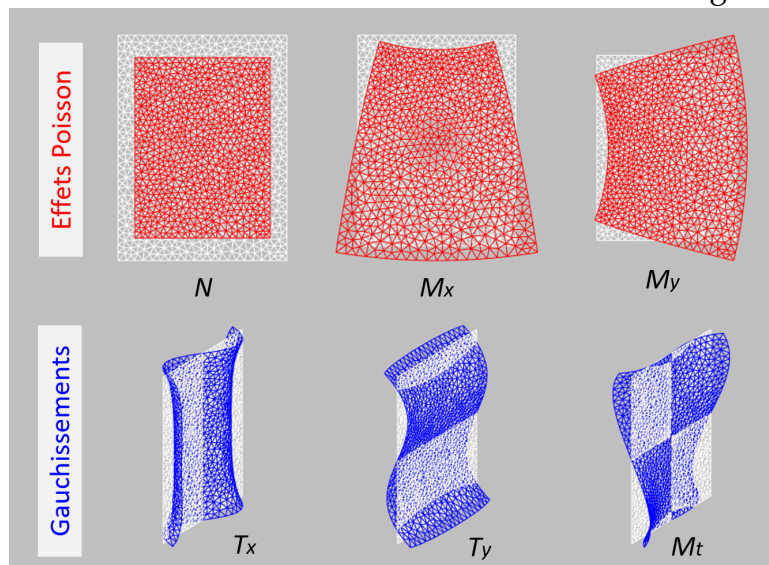
5.4.3 Modes de déformation de section

Pour une section quelconque, **CSection** fournit, pour chacun des 6 efforts intérieurs, les modes de déformations $\{M^i\}$.

Cas d'une section homogène isotrope. Pour le cas homogène isotrope (figure-5.4.3),

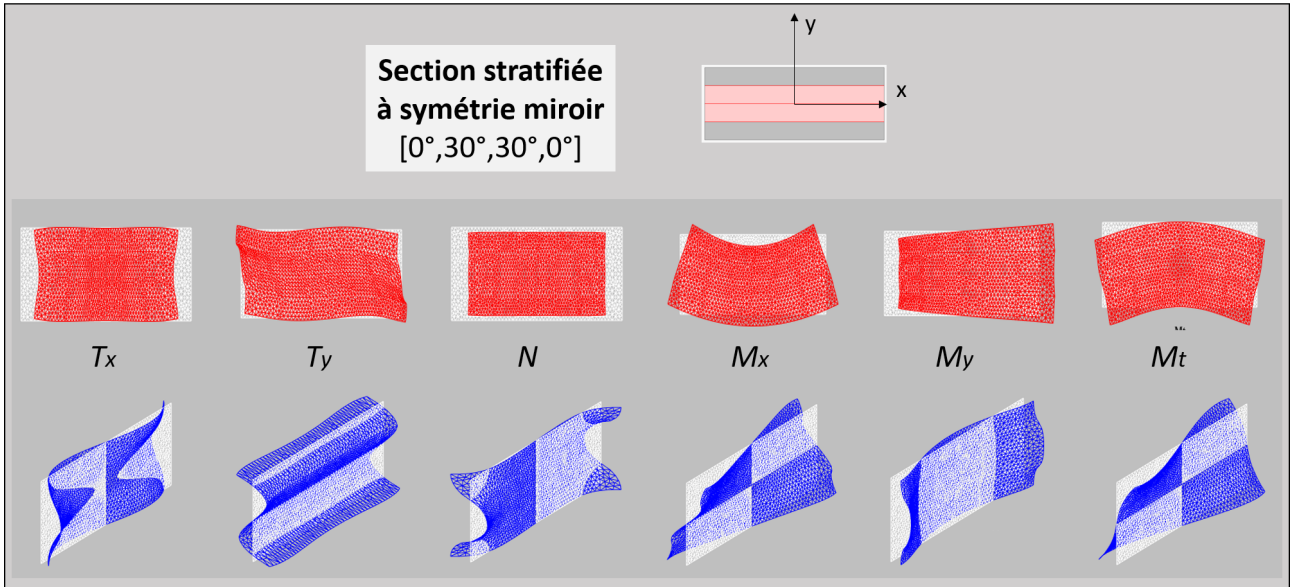
- l'effort normal (N) et les moments de flexion (M_x, M_y) conduisent à des déformations dans le plan de la section; ils traduisent les *effets Poisson*.
- les efforts tranchants (T_x, T_y) et le moment de torsion (M_t) conduisent à des déformation hors plan de section; ils traduisent les *gauchissements* de la section.

FIGURE 5.4.3 – Modes de déformation d'une section homogène isotrope.



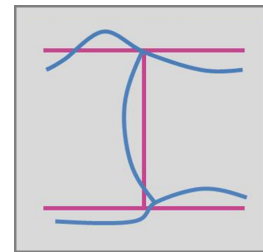
Cas d'une section composite. Pour une section composite quelconque, contrairement au cas homogène isotrope, chaque effort intérieur peut conduire à un *mode 3D* de déformation. Pour illustration, la figure-5.4.4 montre¹ les parties plane et antiplane de chacun des modes 3D de déformation pour une section composite stratifiée [0,30,30,0] à symétrie miroir.

FIGURE 5.4.4 – Modes de déformation d'une section composite.



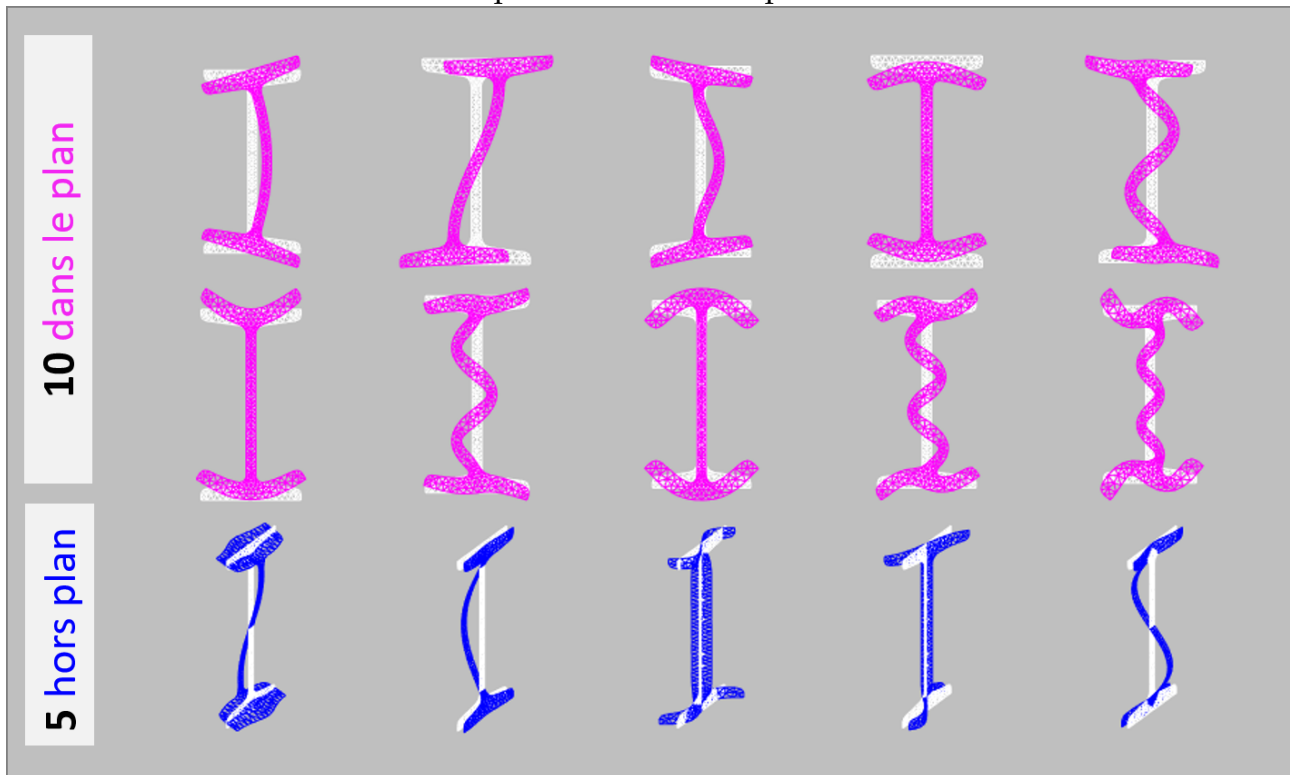
Autres modes de déformation de section. Les modes de déformations $\{M^i\}$ traduisent les effets Poisson et les gauchissements d'une section, mais il ne peuvent traduire les *distorsions* d'une section *mince*.

Une distorsion (figure-ci-contre) peut être vue comme le résultat de la *flexion* des branches de la section mince ou simplement comme un *changement de forme du profil* de la section mince.



Pour mieux caractériser la *déformabilité* d'une section, **CSection** détermine aussi (de manière systématique) *quelques* modes de distorsions $\{D^j\}$ pour une section mince. La figure-5.4.5 montre les distorsions que **CSection** détermine pour une section en I.

FIGURE 5.4.5 – Exemples de distorsions pour une section mince.



5.5 L'utilisation de CSection

5.5.1 L'interface de CSection

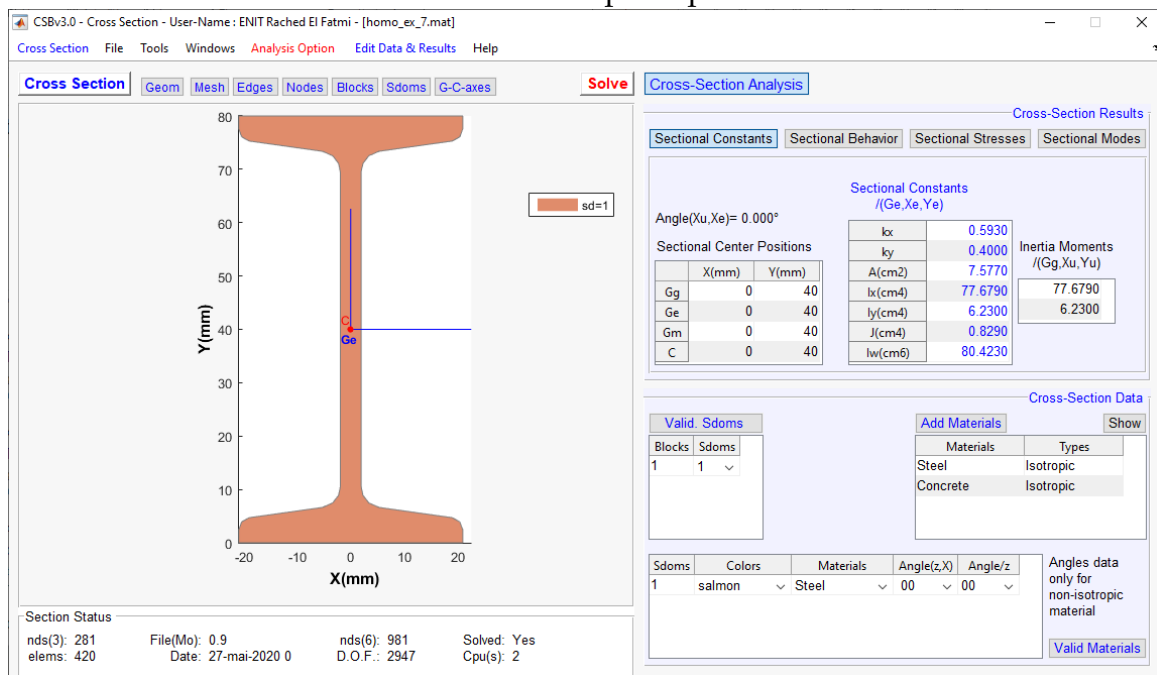
L'interface de **CSection** comporte : comme toute application, une barre de menu en haut de sa fenêtre. Le reste de la fenêtre offre :

- à gauche, principalement, un espace pour les *affichages graphiques*, en-dessous duquel est placé un cadran **Section Status** pour afficher des *informations sur la section* en cours de traitement.
- à droite, deux cadrans :
 - celui du bas, **Cross Section Data** est dédié aux données qui définissent la section. Ces données seront toujours visibles et accessibles pour toute modification.
 - en haut **Cross Section Results** qui affiche, dès que la section est calculée, un ensemble d'onglets et de boutons permettant d'accéder à tous les résultats disponibles pour la section.

L'interface de **CSection** obéit au principe général de **CSB** : *tout est sur la table* ; il n'y a pas à chercher les informations via une arborescence de menus et sous menus. L'accès aux données et aux résultats est immédiat ; en particulier, pour toute modification des données de la section.

1. Chaque mode 3D a été artificiellement décomposé en partie plane et antiplane pour faire apparaître les effets Poisson et les gauchissements.

FIGURE 5.5.1 – La fenêtre principale de CSection.



5.5.2 La barre des menus

Elle est réduite au minimum :

Cross-Cestion

- ▷ **Default Directory** pour indiquer le répertoire de travail par défaut

File

- ▷ **Open Section** pour ouvrir un fichier de section
- ▷ **Import Mesh**
 - ▷ **Parametrized Shapes** pour générer une section maillée, à partir d'un choix de sections dont les formes sont paramétrées. Pour cela, lors de la première exécution, l'utilisateur sera invité à indiquer où se trouve le dossier qui contient l'application de **Gmsh**.
 - ▷ **From Gmsh (.inp)** pour importer une section maillée via **Gmsh** et sauvegardée au format .inp

Save pour sauvegarder le fichier courant

Save as pour sauvegarder le fichier courant sous un autre nom de fichier

Close pour fermer le fichier courant

Exit pour quitter CSection.

Tools

- ▷ **Toolbar on/off** affiche ou pas la barre des outils de visualisation graphique (pour effectuer en particulier un zoom ou tourner le graphique dans l'espace).

Windows pour sélectionner la fenêtre à mettre en avant parmi toutes les fenêtres ouvertes

Analysis Options pour fixer les options de calcul

Edit Data & Results pour éditer, dans un fichier au format texte, les données et/ou les résultats d'un calcul de section

Help

▷ **User Guide** pour ouvrir le présent manuel

▷ **CSB/Videos** pour accéder à la chaîne Youtube qui propose une ensemble de vidéos (tutoriels) dédié à la présentation et l'utilisation des modules de **CSB**.

▷ **Show Colors** pour afficher la palette de couleurs

5.5.3 Les boutons de la zone graphique

Une fois la section déclarée, les boutons situés au dessus de la zone graphique permettent de commuter entre plusieurs affichages pour la section :

Geom affiche les lignes de contour de la section

Mesh affiche le maillage de la section

Edges affiche les contours de la section avec en bleu les numéros des lignes et en rouge les numéros des nœuds qui correspondent aux extrémités des lignes de contours.

Nodes affiche les numéros des nœuds du maillage ; généralement cet affichage nécessite de faire appel au zoom proposé dans la barre des outils de visualisation qui s'affiche par **Tools** ▷ **Toolbar On/Off**.

Blocks affiche les blocs de la section avec leur numéro et leur couleur

Sdoms affiche les sous-domaines de la section avec leur numéro et leur couleur

GC-axes affiche, quand la section a été calculée, les centres de section et les axes d'inertie de la section

5.6 La déclaration des données

5.6.1 L'importation d'une géométrie de section

CSection ne permet pas de dessiner une section et de la mailler en éléments finis 2D ; il suppose qu'elle a été préalablement réalisée avec le logiciel **Gmsh** et sauvegardée au format **.inp**. La commande pour importer une section est : **File** ▷ **Import Mesh** ▷ **From Gmsh (.inp)**

Une section peut comporter une ou plusieurs surfaces. Pour **CSection** une surface est désignée par **Block**. Une fois importée une section apparaît dans la zone graphique, où chaque **Block** (ou surface) porte un numéro différent et s'affiche dans une couleur différente. La correspondance numéro de **Block** et couleur est donnée par une légende. La figure-5.6.1 montre un exemple de section comportant 3 **Blocks**.

5.6.2 L'affectation des matériaux à la section

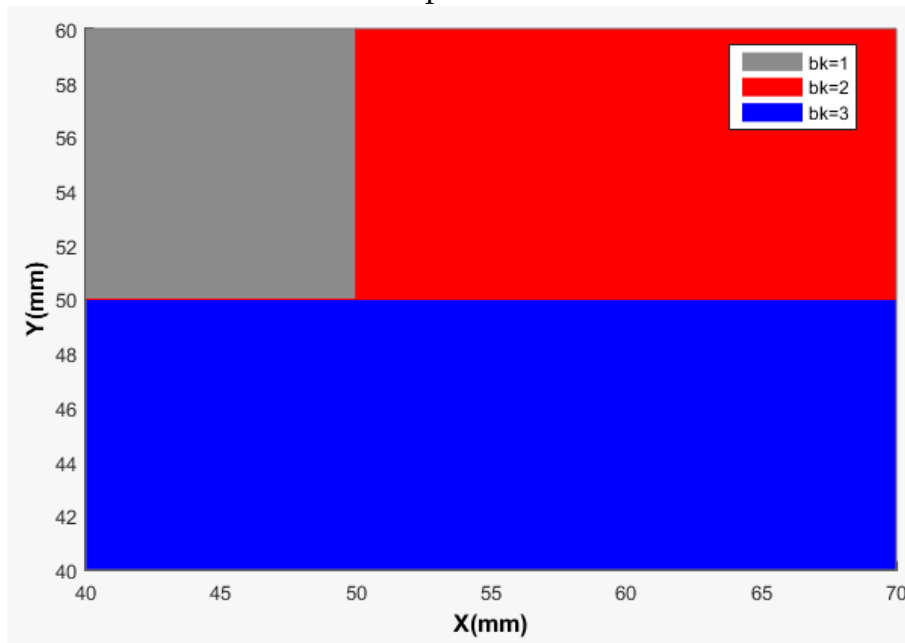
Une fois la section importée, il reste à affecter des matériaux à la section. Cette affectation se fait à l'aide des trois tables affichées dans le cadre intitulé **Cross-Section Data** :

[Blocks | Sdoms] permet d'associer les blocs aux sous-domaines. **CSection**, associe par défaut chaque bloc (identifié par son numéro) à un sous-domaine (de même numéro). Deux blocs (ou plus) peuvent être associés à un même sous-domaine ; par exemple pour la section de la figure-5.6.1, les blocs 1 et 3 ont été associés au sous-domaine 1 (figure-5.6.2).

Attention : la numérotation des sous-domaines qui est retenue doit impérativement aller de 1 au nombre maximum de sous-domaines retenus !

Valid Sdoms (obligatoire) permet de valider l'association blocs/sous-domaines

FIGURE 5.6.1 – Section comportant trois surfaces ou Blocks.



[Materials | Types] affiche la liste des matériaux que l'on peut affecter à la section ; par défaut, cette table affiche deux matériaux (acier et béton) mais il est possible d'y ajouter d'autres matériaux.

[Add Materials] permet de sélectionner d'autres matériaux parmi les listes de matériaux disponibles, et des les ajouter à ceux présents dans table.

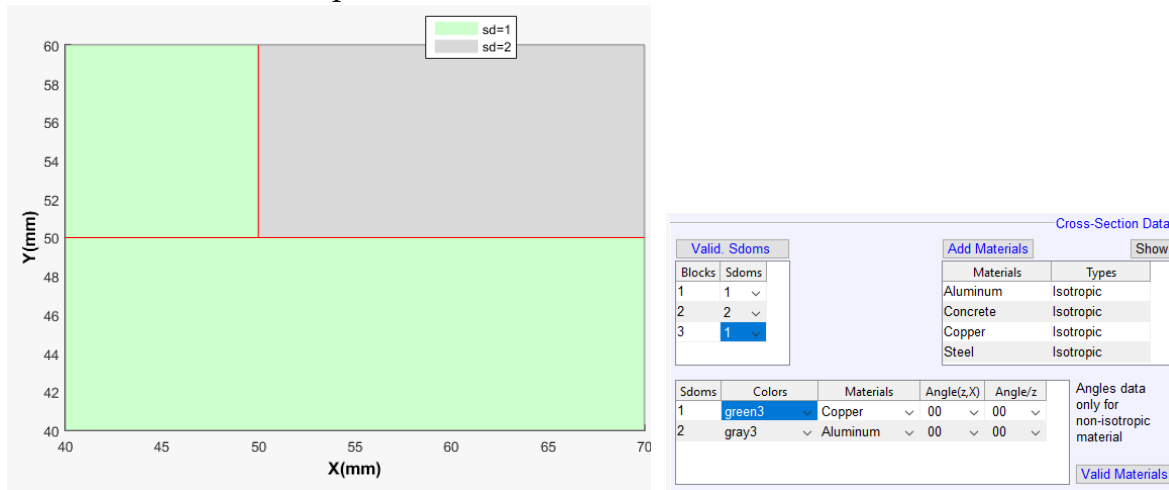
[Show] permet d'afficher les constantes d'un matériau sélectionné dans la table.

[Sdoms | Colors | Materials | Angles(z,X) | Angles/z] Une fois l'association blocs/sous-domaines validée, cette table affiche par défaut, pour chacun des sous-domaines retenus : une couleur et un matériau (acier). On peut choisir pour chaque sous domaine :

- une couleur parmi celle proposée dans la liste déroulante [↓] associée aux couleurs.
- un matériau parmi ceux proposés dans la liste déroulante [↓] associée aux matériaux et qui correspond aux matériaux présents dans la table des matériaux.

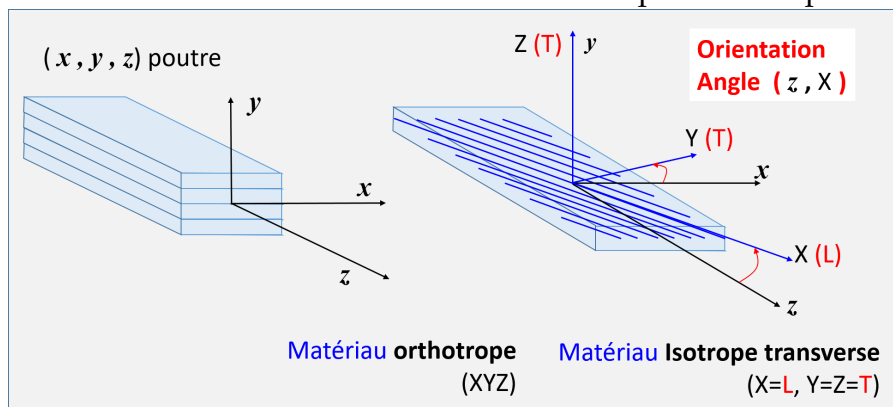
- deux angles [$\text{Angles}(z,X) \mid \text{Angles}/z$] pour orienter les axes matériels d'un matériau anisotrope (isotrope transverse ou orthotrope). Ces angles ne concernent pas un matériau isotrope. La définition de ces angles d'orientation est donnée plus loin.
- Valid Materials** (obligatoire) permet de valider l'affectation des matériaux aux sous-domaines.

FIGURE 5.6.2 – Section comportant trois surfaces (Blocks) mais deux sous domaines (Sdoms)



5.6.3 L'orientation des matériaux anisotropes

FIGURE 5.6.3 – Orientation d'un matériau orthotrope ou isotrope transverse



Dans **CSection** un matériau anisotrope peut être orthotrope ou isotrope transverse et deux angles sont prévus, dans la table d'affectation des matériaux, pour orienter la position des axes matériels du matériau par rapport aux axes de la poutre :

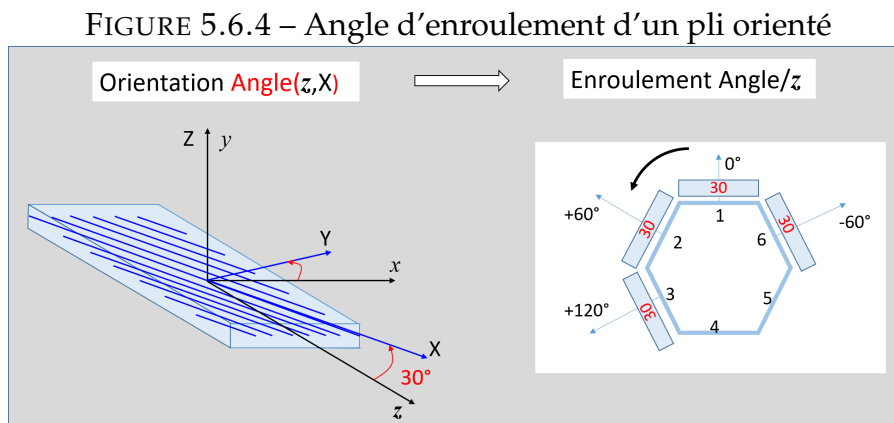
- l'angle d'orientation $\text{Angle}(z,X)$
- l'angle d'enroulement Angle/z

Ces deux angles permettent, en particulier, de déclarer de manière simple l'orientation d'une section stratifiée, avec la possibilité qu'une couche (ou pli) orientée soit de plus enroulée.

On note (x,y,z) les axes de la poutre, (X,Y,Z) les axes matériels d'un matériau orthotrope; et on convient que $(X=L, Y=T, Z=T)$ désigne ceux d'un matériau isotrope transverse.

L'angle d'orientation Angle(z,X). Le point départ est que l'orientation à 0° indique que les axes de la poutre (x, y, z) et du matériau (X, Y, Z) sont tels que ($X = z, Y = x, Z = y$). L'orientation du matériau est défini par l'angle (z, X) de rotation autour de l'axe y de la poutre (ou Z du matériau), telle que le montre la figure-5.6.3. Dans la table d'affectation des matériaux la colonne relative à l'angle d'orientation offre une liste déroulante pour choisir les angles entre -180° et 180°.

L'angle d'enroulement Angle/z . L'enroulement d'un pli se fait après avoir choisi l'orientation du pli. L'enroulement d'un pli (orienté) se fait autour de l'axe z de la poutre.



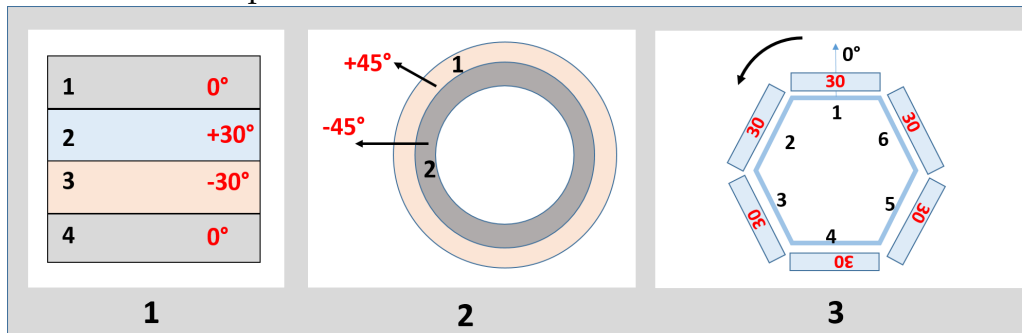
La figure-5.6.4 montre l'enroulement d'un pli orienté à 30° autour d'une section hexagonale : le pli placé sur la première arête au sommet de l'hexagone correspond à un enroulement nul; ce même pli (orienté à 30°) est posé avec un enroulement de +60° pour la 2eme arête, de +120° pour la 3eme arête et ainsi de suite.

Pour le cas particulier, d'un pli enroulé autour d'un *cercle*, l'angle d'enroulement *varie* de manière continue autour du cercle. Pour déclarer cet enroulement particulier, (ce n'est possible que pour le cas circulaire), il faut donner la valeur *var* à l'angle d'enroulement; cette valeur est prévue dans la liste déroulante des angles d'enroulement proposés (attention, pour une section qui présente un empilement de plusieurs plis, il suffit qu'un pli soit enroulé avec la valeur *var* pour que tous les plis le soient !

Exemples. Pour illustration, voici comment doivent être déclarées les tables d'affectation des matériaux pour les 3 sections stratifiées de la figure-5.6.5; on suppose que tous les plis des sections sont constitués du même matériau note XYZ-matériau.

Sdoms	Colors	Materials	Angles(z,X)	Angle/z	
Section 1	1	couleur1	XYZ-matériau	0°	0°
	2	couleur2	XYZ-matériau	+30°	0°
	3	couleur3	XYZ-matériau	-30°	0°
	4	couleur4	XYZ-matériau	0°	0°

FIGURE 5.6.5 – Exemples de section stratifiées avec ou sans enroulement des plis.



	Sdoms	Colors	Materials	Angles(z,X)	Angle/z
Section 2	1	couleur1	XYZ-materiau	+45	var
	2	couleur2	XYZ-materiau	-45°	var
Section 3	1	couleur1	XYZ-materiau	+30°	0°
	2	couleur2	XYZ-materiau	+30°	+60°
	3	couleur3	XYZ-materiau	+30°	+120°
	4	couleur4	XYZ-materiau	+30°	+180°
	5	couleur5	XYZ-materiau	+30°	-120°
	6	couleur6	XYZ-materiau	+30°	-60°

5.6.4 Les options de calcul

CSection assure le calcul des **CMS** d'une section , et de manière optionnelle :

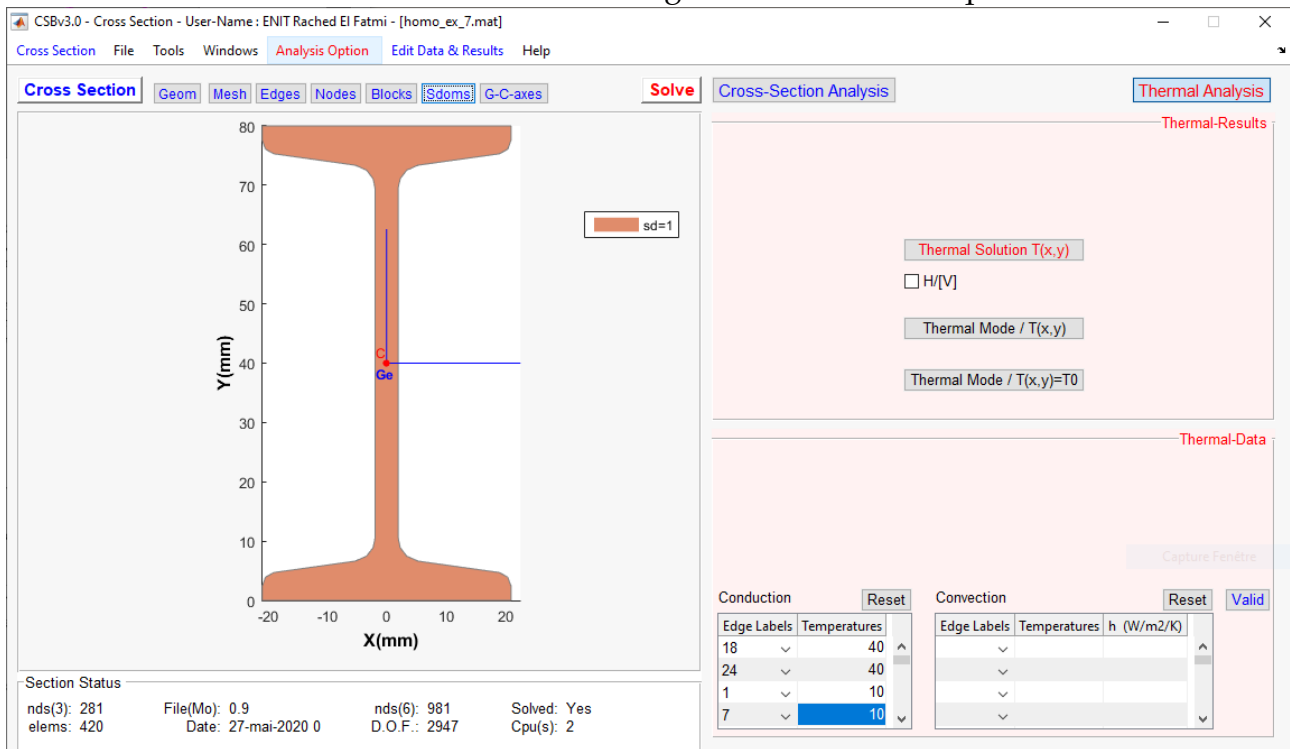
- le calcul de quelques modes de distorsion
- un calcul thermique pour des conditions de température imposées à la section

Dans la barre des menus, **Analysis Option** affiche une fenêtre dans laquelle 3 choix sont proposés :

- Cross-Section Analysis** pour le calcul des caractéristiques de la section.
- Thermal Analysis** pour qu'un calcul thermique de section puisse être effectué. Pour les données d'un calcul thermique, voir le paragraphe-5.6.5.
- Sectional Distortion Analysis** pour qu'un calcul de distorsions soit effectué. Ce calcul le cas échéant est automatique; le nombre de distorsions est de 10 dans le plan n et de 5 hors plan de la section.

Cocher l'option **Thermal Analysis**, conduit à l'apparition de l'onglet **Thermal Analysis** (en haut à droite) dans la fenêtre principale de **CSection** (figure-5.6.6); cet onglet affiche un cadre scindé en deux : en bas, la déclaration des conditions de température imposées à la section, et en haut les résultats une fois que le calcul thermique est effectué. De la même manière l'onglet **Cross-Section Analysis** affiche le cadre des données et des résultats de calcul des **CMS**; sauf que cet onglet est toujours présent.

FIGURE 5.6.6 – Le cadre associé à l'onglet du calcul thermique de section



5.6.5 Les conditions de température pour un calcul thermique

Les calculs thermiques supposent que l'onglet **Thermal Analysis** a été coché dans les options d'analyse. Deux tables sont proposées dans le cadre dédié aux données des conditions de température à imposer² à la frontière de la section :

- une table pour les données de conduction [Edge Labels | Temperatures]
- une table pour les données de convection [Edge Labels | Temperatures | h (W/m2/K)]

La frontière ou le contour de la section est formée de lignes de bord (edges) portant des numéros (en bleu). La visualisation des lignes de bords avec leur numéro s'effectue par le bouton **Edges** au dessus de la zone graphique où est affichée la section.

Les données pour la table Conduction, consistent à imposer une température à certaines lignes de bord en choisissant leur numéro dans la liste déroulante de la colonne Edge Labels.

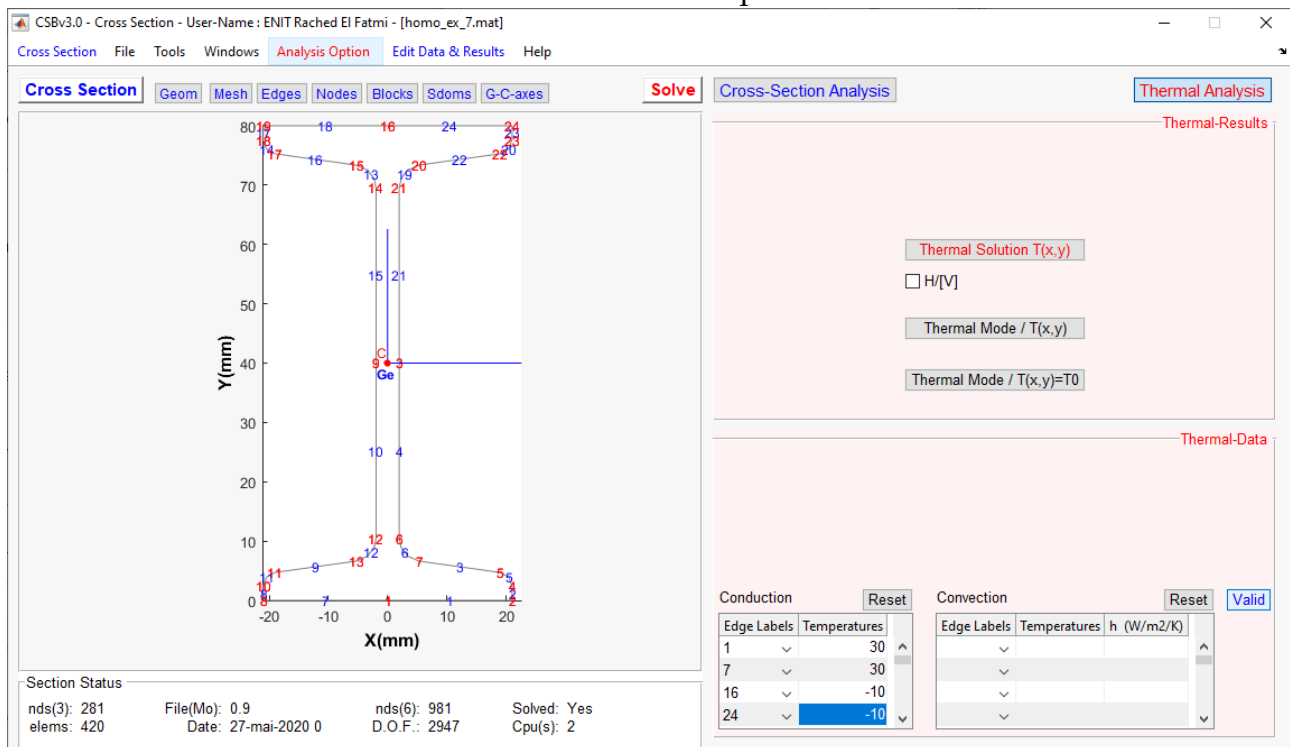
2. Naturellement, on ne peut imposer sur une même ligne de bord conduction et convection !

Dans la figure- 5.6.6 , cette table indique que la température imposée aux bords 16 et 24 est de 40°, et que celle imposée aux bords 1 et 7 est de 10°.

Les données pour la table Convection, consistent à imposer la température du fluide qui se trouve au voisinage de certaines lignes de bord en choisissant leur numéro dans la liste déroulante de la colonne Edge Labels, et en indiquant la valeur du coefficient de convection h du fluide.

La validation (**Valid**) des données est obligatoire.

FIGURE 5.6.7 – Les conditions de température sur une section



5.7 Les calculs et les résultats

5.7.1 Caractéristiques Mécaniques de Section

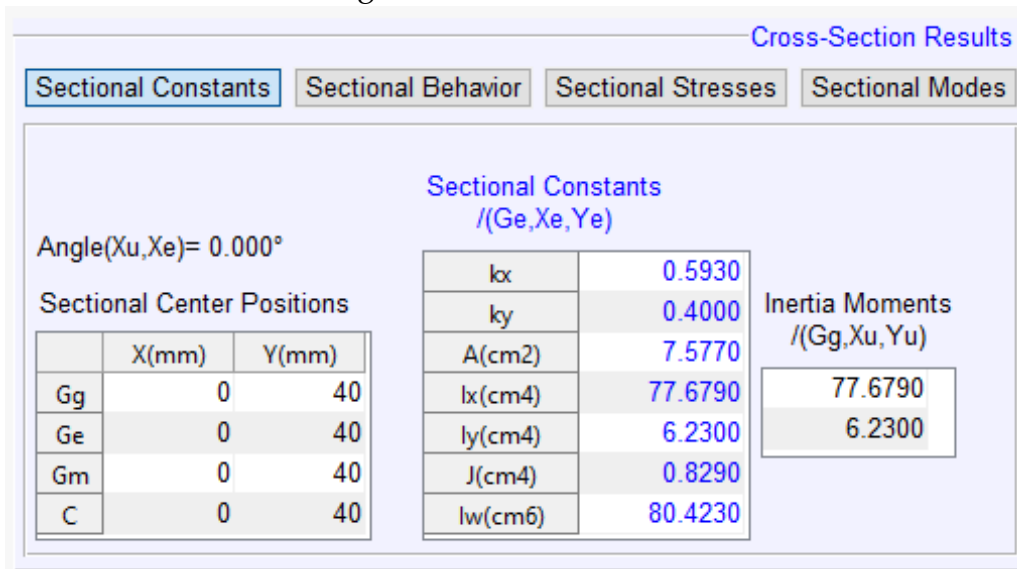
Une fois les données de la section (géométrie et matériaux) validées, les calculs sont lancés via le bouton **Solve**.

Dès résolution, un ensemble de boutons et d'onglets apparaissent dans le cadre **Cross-Section Results** (figure-5.7.1); ils permettent d'accéder aux différents résultats.

Sectional Constants affiche (figure-5.7.1) :

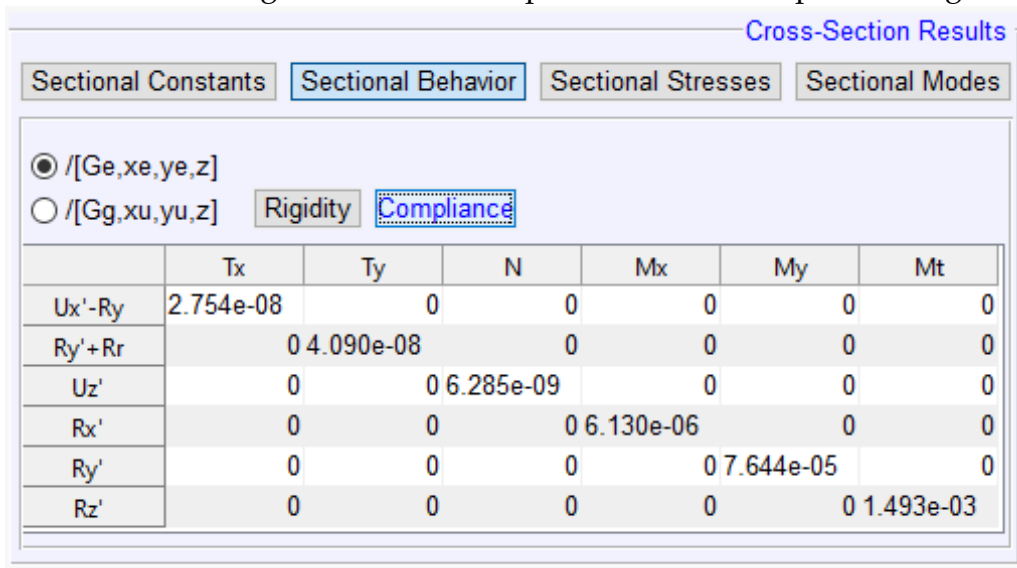
- La position des centres de la section par rapport au repère de l'utilisateur (celui qui a servi à définir la géométrie de la section, et qui est noté (Xu, Yu)).

FIGURE 5.7.1 – Onglets des résultats : Constantes de section



- L'angle (Xu,Xe) qui donne la position des axes d'inertie (Xe,Ye) par rapport aux axes de l'utilisateur (Xu,Yu).
- Pour les constantes de section, l'affichage diffère selon que la section est homogène ou pas :
 - pour une section homogène isotrope, **CSection** fournit les constantes de la section en référence au centre et aux axes d'inertie notés (Ge,Xe,Ye) selon les unités indiquées. On notera que les moments d'inertie sont aussi données en référence aux axes de l'utilisateur (Gg,Xu,Yu) et que **CSection** fournit aussi la constante de gauchissement de torsion (I_w).
 - pour une section hétérogène ou composite, **CSection** ne fournit que les rigidités associés aux 6 efforts intérieurs, avec des unités en S.I. (Système International)

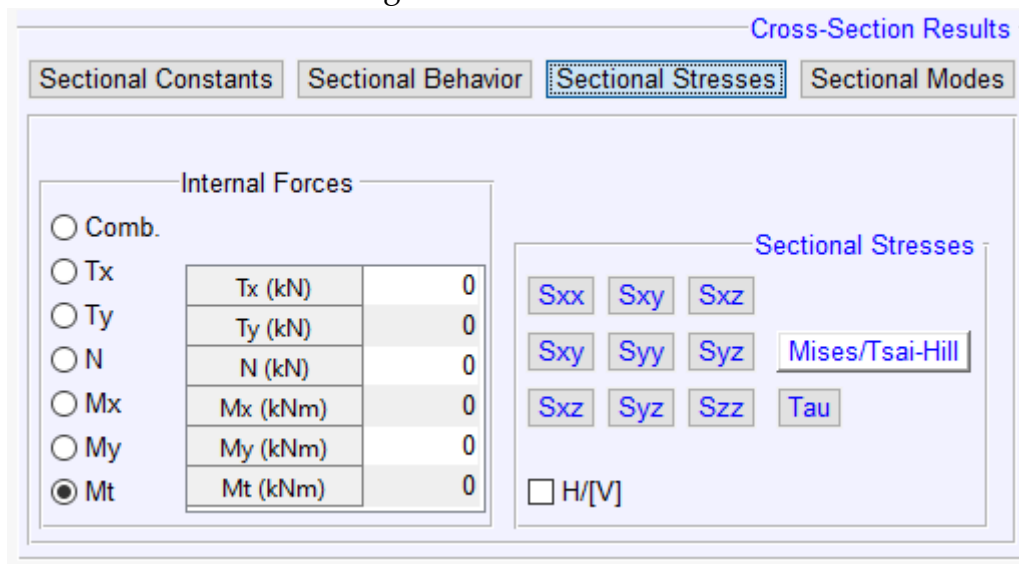
TABLE 5.7.1 – Onglets résultat. Comportement 1D : souplesse et rigidité



Sectional Behavior affiche (figure-5.7.1) les matrices (6x6) de souplesse ou de rigidité

associées au comportement 1D, et en référence à (Ge,Xe,Ye) ou bien à (Gg,Xu,Yu). La matrice (figure-5.7.1) apparaît ici diagonale parce qu'elle est relative à une section homogène isotrope doublement symétrique.

FIGURE 5.7.2 – Onglets résultats : Contraintes de section.



Sectional Stresses affiche (figure-5.7.2) l'état de contrainte dans la section, pour chacun des 6 effort intérieurs (Tx,Ty,N,Mx,My,Mt) de valeur unité³, ou encore pour une combinaison d'efforts intérieurs à déclarer dans la table associée au bouton radio Comb. Pour le choix d'effort intérieur(s) effectué via le bouton radio adéquat, le champ de contrainte est fourni pour chaque composante de contrainte (le cisaillement et la contrainte de Mises/Tsai-Hill sont aussi proposées).

Le champ de contrainte, correspondant aux choix effectués (effort intérieur et composante de contrainte), est affiché en isovaleurs (couleurs) et en relief; la case H/[V] permet d'obtenir un affichage Horizontal ou Vertical (par défaut) de la section.

Les figures-5.4.1-5.4.2 montrées précédemment affichent des exemples de champ de contraintes pour une section homogène ou hétérogène.

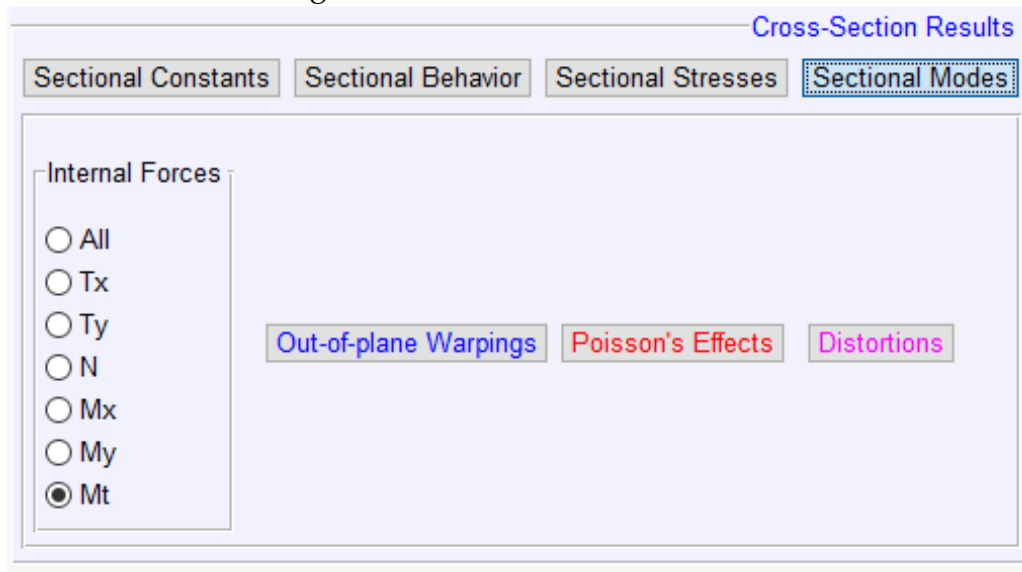
Sectional Modes affiche (figure-5.7.3), pour chaque effort intérieur (choix d'un des bouton radio Tx,Ty,N,Mx,My,Mt), le mode de déformation dans le plan de la section (**Poisson's Effects** ou le gauchissement de la section (**Out of Plane Warpings**); le bouton radio (All) affiche les modes (non nuls⁴) de déformation pour les 6 efforts intérieurs. Des exemples d'illustrations ont été donnés précédemment figures-5.4.3-5.4.4, pour les cas homogène ou hétérogène.

Eventuellement, si des distorsions ont été calculées, le bouton **Distorsions** est alors présent et il permet d'afficher tous les modes de distorsion obtenus pour la section. Un exemple d'illustration est donné figure-5.4.5.

3. Dans **CSection**, les valeurs unitaires sont de 1kN pour une force et de 1kNm pour un couple.

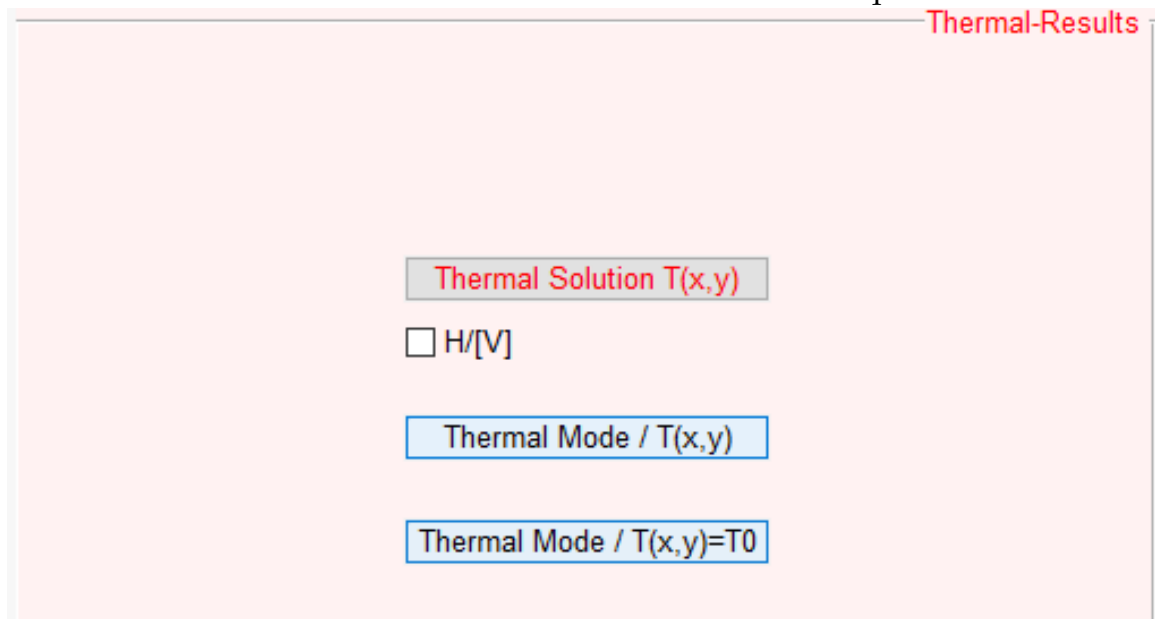
4. Si pour un effort intérieur le mode associé est nul, il n'est pas affiché; par exemple pour une section homogène isotrope, **Poisson's Effects** conduira à l'affichage des modes associés à l'effort normal et aux moments de flexion uniquement, parce que les efforts tranchants et le moment de torsion ne conduisent pas à des effets Poisson.

FIGURE 5.7.3 – Onglets résultats : modes de déformation de section



5.7.2 Solution thermique

FIGURE 5.7.4 – Résultats d'un calcul thermique.

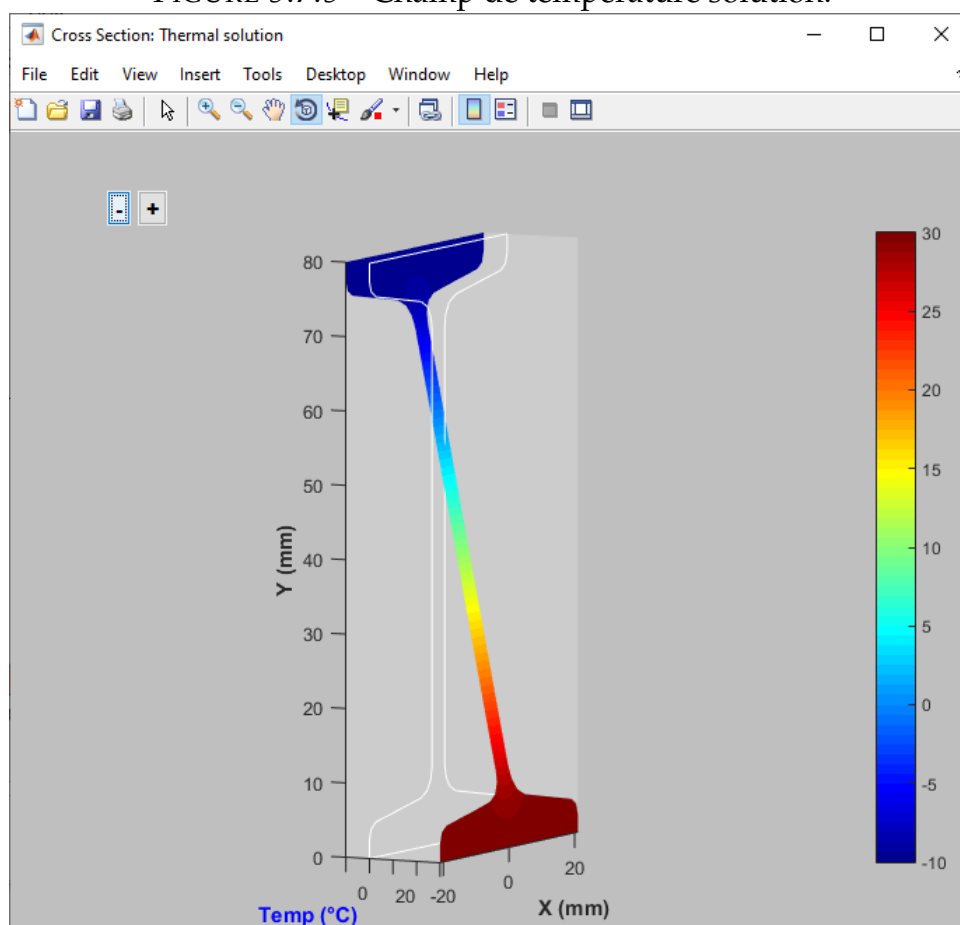


Une fois les données en température validées, le bouton **Solve** lance la résolution. Cette exécution s'accompagnera automatiquement des calculs de section, s'ils n'ont pas encore été effectués. Les résultats relatifs aux calculs thermiques (figure-5.7.4) se trouvent dans le cadre **Thermal-Results** sous l'onglet **Thermal Analysis**. Dans ce cadre, 3 boutons sont proposés :

Thermal Solution $T(x,y)$ affiche (figure-5.7.5) le champ de température solution.

Thermal Mode/ $T(x,y)$ affiche (figure-5.7.2, à gauche) le mode de déformation de la section associé au champ de température solution.

FIGURE 5.7.5 – Champ de température solution.



Thermal Mode/T(x,y)=T0 affiche (figure-5.7.2, à droite) le mode de déformation de la section associé à une variation de température constante dans section.

Les deux modes de déformations de section, que **CSection** détermine, sont utiles au module **Spatial Beam** pour le calcul des effets de la température sur une poutre selon la méthode de calcul avancée (**RBT**).

5.8 L'édition des données et des résultats

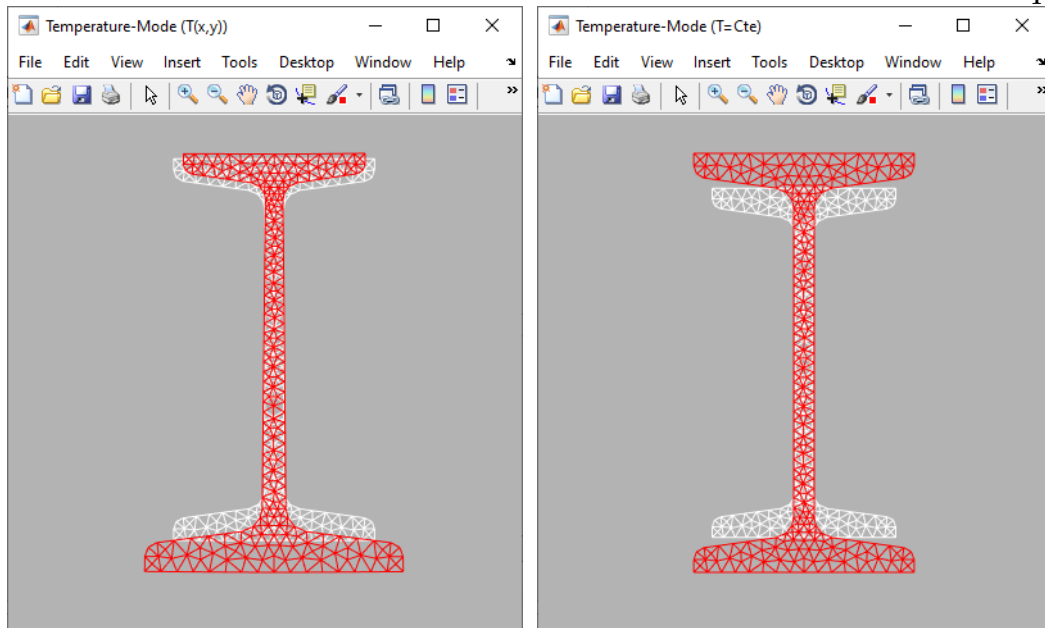
Données et résultats peuvent être édités dans un fichier au format texte via **Edit Data & Results** de la barre des menus. Ce menu propose :

Data pour que soient éditées, non pas les données de la section, mais les informations sur le fichier contenant la section.

Characteristics pour que soient éditées toutes les constantes de section

Stress Fields pour que soit édité un champ particulier de contrainte. Une fenêtre (figure-5.8.1) est proposée pour que le choix de champ de contraintes soit fixé : une combinaison d'efforts intérieurs, et certaines composantes de contrainte (si aucun choix de composantes n'est effectué, elles sont toutes éditées).

FIGURE 5.7.6 – Modes de déformation de section associés au calcul thermique.



Thermal Field pour que soit édité le champ de température solution.

Données et résultats sont affichés dans le même fichier, tant que les données n'ont pas été changées ; sinon un nouveau fichier est exigé

FIGURE 5.8.1 – Edition de résultats. Choix de champs de contraintes

Figure 2: Stress field

Select a combination of the 6 internal forces

Tx (kN)	0
Ty (kN)	0
N (kN)	0
Mx (kNm)	0
My (kNm)	0
Mt (kNm)	0

Select the stress components

Sxx	Syy	Szz	Syz	Sxz	Sxy	Tau	Mis
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Cancel OK

Chapitre 6

Le module Plane Structure

Sommaire

6.1	Introduction	69
6.1.1	La définition de la structure et des chargements	69
6.1.2	Les calculs de structure et les résultats	69
6.2	L'utilisation de Plane Structure	71
6.2.1	La barre des menus	72
6.2.2	La zone graphique	73
6.3	La déclaration d'une structure et de ses appuis	74
6.3.1	Les points	74
6.3.2	Les sections	75
6.3.3	Les poutres	76
6.3.4	Les appuis	79
6.4	La déclaration des chargements	82
6.5	Calculs d'équilibre et résultats	87
6.5.1	La résolution	87
6.5.2	Les résultats	88
6.6	Calculs de vibrations et résultats	93
6.6.1	Les données	93
6.6.2	Les résultats	94
6.7	Calculs de Flambement et résultats	95
6.7.1	Les données	96
6.7.2	Les résultats	96
6.8	Calculs de longueurs de flambement	97

Le module de calcul d'une structure de poutres dans le plan, qui est limité aux poutres de section homogène isotrope, est le module par lequel il est recommandé de débiter dans **CSB**. Dans **Plane Structure** tous les aspects d'un calcul de structure, en termes de données et de résultats, sont proposés; et cela concerne les calculs d'équilibre, de vibration et de flambement. La pratique de ce module permet à l'utilisateur de retrouver la RDM qu'il est censé connaître et de se familiariser avec le fonctionnement de **CSB**, avant de passer aux deux autres modules plus pointus qui traitent des poutres de section quelconque dans l'espace.

6.1 Introduction

Plane Structure assure le calcul par EF-1D de structures planes constituées d'un assemblage de poutres droites. Les calculs de structure sont menés conformément à la théorie *classique*¹ des poutres (Annexe-A) réduite au cas plan. Ce module propose des analyses *d'équilibre, de vibration et de flambement*; une *originalité* de **Plane Structure** est de fournir aussi le calcul automatique de la *longueur de flambement* d'un élément quelconque de la structure.

6.1.1 La définition de la structure et des chargements

D'un point de vue mécanique, une structure est ici définie par un assemblage de poutres droites et de sections constantes homogènes et isotropes; les caractéristiques des sections sont supposées préalablement calculées avec le module **CSection** de **CSB**. Les conditions de liaison des poutres aux nœuds d'assemblage sont complètes (par défaut) ou articulées. Les conditions d'appuis sont quelconques.

Les chargements mécaniques sont quelconques et il est possible d'imposer une variation de température globale pour la structure ou encore des gradients de température à certaines poutres.

Les chargements sont déclarés par *cas de charge* et deux cas de charge sont proposés par défaut : le poids propre et la variation globale de température.

6.1.2 Les calculs de structure et les résultats

Avant tout calcul, **Plane Structure** vérifie que la structure ne comporte pas de *mécanisme* (local ou global). Si un ou plusieurs mécanismes sont détectés, l'utilisateur est averti et il lui est possible de visualiser (animation) le ou les mécanismes afin qu'il puisse corriger la structure.

1. La contribution de l'effort tranchant n'est pas négligée.

Equilibre de la structure. Pour l'analyse de l'équilibre, tous les cas de charge déclarés sont systématiquement calculés. L'exploitation des résultats s'effectue par *combinaison* de cas de charge. Pour une combinaison de cas de charge définie par l'utilisateur, les résultats fournis sont :

- pour la structure :
 - l'épure des différents efforts intérieurs (effort normal N , effort tranchant T et moment de flexion M) et des contraintes (axiales) au niveau des fibres extrêmes (σ^+ , σ^-)
 - la déformée de la structure et son animation
- pour chaque poutre :
 - les diagrammes des efforts intérieurs (N, T, M) et des contraintes aux fibres extrêmes (σ^+ , σ^-)
 - la valeur et le lieu de la *flèche* (déplacement transversal) maximale.
- pour les nœuds :
 - leurs déplacements (translation et rotation)
 - les actions des différentes poutres reliées au nœud d'assemblage
- pour les appuis : les réactions.

De plus, pour n combinaisons de cas de charges définies par l'utilisateur, **Plane Structure** fournit les *enveloppes* ($N, T, M, \sigma^+, \sigma^-$) pour chaque poutre.

Vibration de la structure. Les calculs de vibration de la structure fournissent :

- les premiers 2 modes de vibrations naturelles et leur fréquences;
- ou les premiers modes de vibration autour d'un état chargé et leur fréquences.

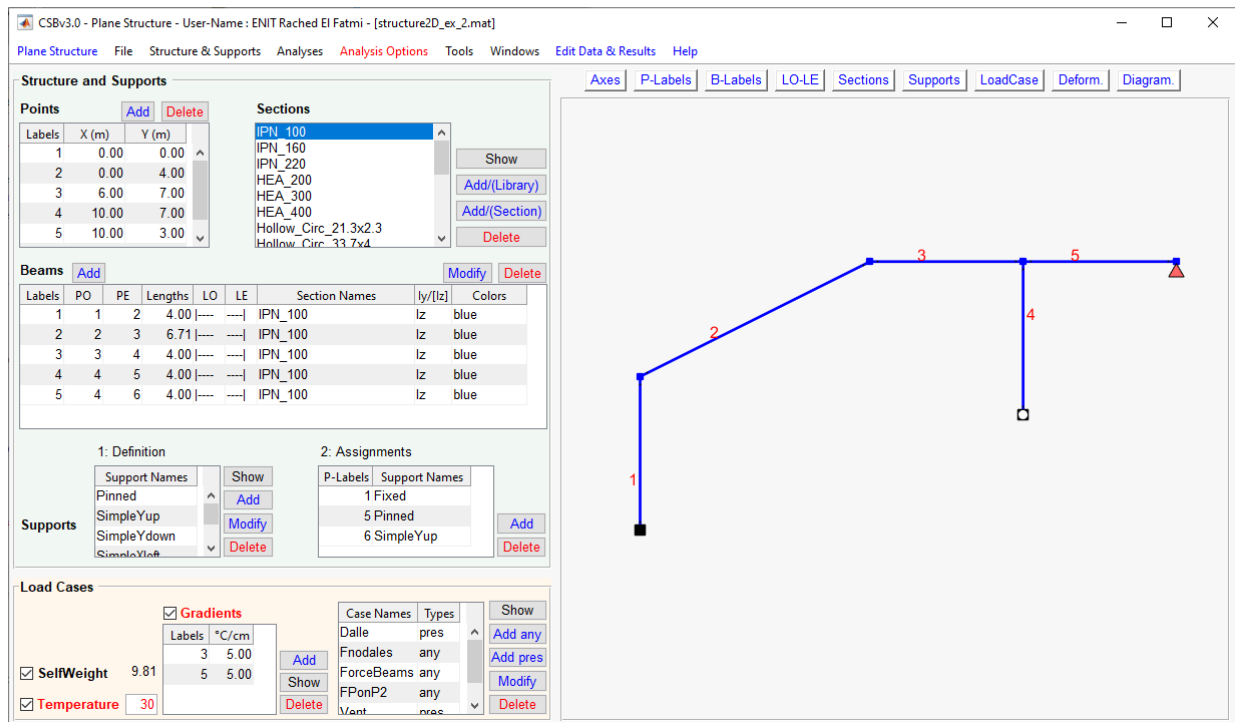
Flambement de la structure. Les calculs de flambement de la structure fournissent :

- les premiers mode de flambement et leur charge critique pour l'amplification d'un chargement à partir de l'état naturel;
- les premiers mode de flambement et leur charge critique pour l'amplification d'un chargement à partir d'un état préchargé.

Longueur de flambement de poutre. Pour tout élément de la structure, la longueur de flambement est fournie :

- sans prise en compte d'un chargement sur la structure.
- ou avec prise en compte d'un chargement sur la structure

FIGURE 6.2.1 – L'interface de **Plane Structure** : Structure et chargements



6.2 L'utilisation de Plane Structure

L'interface de **Plane Structure** comporte (figure-6.2.1) : comme toute application, une barre de menu en haut de sa fenêtre. Le reste de la fenêtre offre :

- à droite, principalement, un espace pour les *affichages graphiques*.
- à gauche, deux zones :
 - celle du bas, intitulée **Load Cases**, est dédié aux déclarations des chargements ;
 - celle du haut, est dédiée à des affichages différents selon que l'on clique sur **Structure & Supports** ou sur **Analyses** de la barre des menus.

Structure & Supports conduit à l'affichage (figure-6.2.1) du cadre intitulé **Structure & Supports** dédié aux données qui définissent la structure et ses appuis.

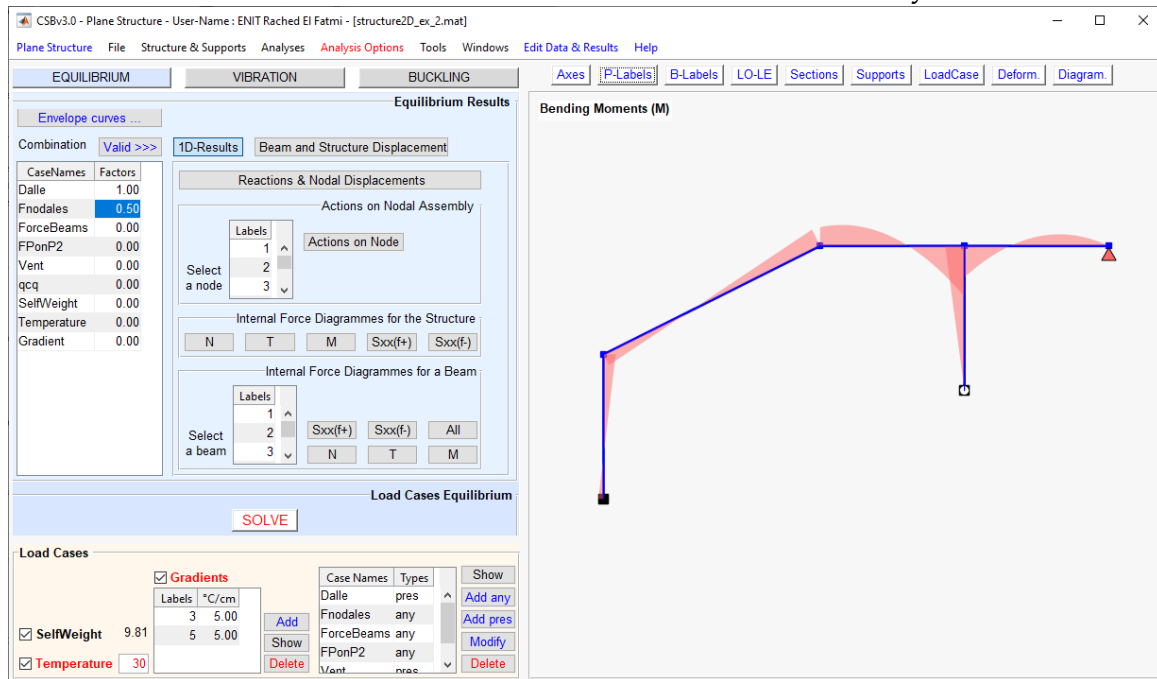
Analyses conduit à l'affichage (figure-6.2.2) d'un cadre au dessus duquel apparaissent 3 onglets : correspondant aux 3 types d'analyse :

- **Equilibrium**, pour lancer les calculs d'équilibre et visualiser les résultats
- **Vibration**, pour lancer des calculs de vibration et visualiser les résultats
- **Buckling**, pour lancer des calculs de flambement et visualiser les résultats

Les onglets **Vibration** et **Buckling** n'apparaissent que s'ils ont été sélectionnés dans le menu **Analysis Options** de la barre des menus.

2. le nombre de modes est ≤ 10 .

FIGURE 6.2.2 – Interface de **Plane Structure** : Analyses



6.2.1 La barre des menus

L'interface de **Plane Structure** obéit au principe général de **CSB** : *tout est sur la table* ; il n'y a pas à chercher les informations via une arborescence de menus et sous menus. Pour chaque type d'analyse, l'accès aux données et aux résultats est immédiat ; en particulier, pour toute modification des données qui définissent la structure (dont les appuis) et les chargements.

La barre des menus est donc réduite au minimum :

Plane Structure

- ▷ **Default Directory** pour indiquer le répertoire de travail par défaut

File

- ▷ **Open Plane Structure** ▷ **Examples** pour ouvrir un exemple de structure plane ;
 - ▷ **csb_examples Directory** pour ouvrir une structure plane depuis le répertoire `csb_examples` ;
 - ▷ **Default Directory** pour ouvrir une structure plane depuis le répertoire par défaut ;
- ▷ **Import Plane Structure** ▷ **File.inp (Gmsh)** pour importer une structure plane réalisée avec Gmsh et sauvegardée au format `.inp` ;
 - ▷ **File.dxf (Xcad)** pour importer structure plane réalisée avec un logiciel de DAO et sauvegardée au format `.dxf` ;

Save pour sauvegarder le fichier courant ;

Save as pour sauvegarder le fichier courant sous un autre nom de fichier ;

Close pour fermer le fichier courant ;

Exit pour quitter **Plane Structure**.

Structure & Supports affiche le cadre Structure & Support contenant les données qui définissent la structure et ses appuis ;

Analyses affiche le cadre des analyses d'équilibre, et éventuellement de vibration et de flambement (s'ils ont été préalablement sélectionnés)

Analysis Options

- ▷ **Equilibrium [on]** apparaît grisé, parce que toujours affiché ;
- ▷ **Vibration on/[off]** permet de faire apparaître ou pas l'onglet Vibration au dessus du cadre des analyses ; par défaut cet onglet n'apparaît pas.
- ▷ **Buckling on/[off]** permet de faire apparaître ou pas l'onglet Buckling au dessus du cadre des analyses ; par défaut cet onglet n'apparaît pas.

Tools

- ▷ **Toolbar on/off** affiche ou pas la barre des outils de visualisation graphique (pour effectuer en particulier un zoom).

Windows pour sélectionner la fenêtre à mettre en avant parmi toutes les fenêtres ouvertes

Edit Data & Results pour éditer, dans un fichier au format texte, les données et/ou les résultats d'un calcul de structure plane

Help

- ▷ **User Guide** pour ouvrir le présent manuel
- ▷ **CSB/Videos** pour accéder à la chaîne Youtube qui propose une ensemble de vidéos (tutoriels) dédié à la présentation et l'utilisation des modules de **CSB**.
- ▷ **Show Colors** pour afficher la palette de couleurs

6.2.2 La zone graphique

Dans **Plane Structure**, toute donnée de structure ou résultat d'analyse peut être visualisé graphiquement. Pour éviter un encombrement d'informations sur la structure affichée, les boutons situés au dessus de la zone graphique permettent d'afficher ou pas chaque entité graphique (données ou résultats) disponible :

Axes affiche ou pas les axes du repère dans lequel est affichée la structure

- P-Labels** affiche ou pas les numéros des nœuds (ou points) de la structure
- B-Labels** affiche ou pas les numéros des poutres de la structure
- LO-LE** affiche ou pas les liaisons à l'Origine et à l'Extrémité de chacune des poutres de la structure (si la liaison est complète, rien n'apparaît)
- Sections** affiche ou pas, sur chaque poutre de la structure, les axes locaux de la section
- Supports** affiche ou pas les appuis de la structure
- LoadCase** affiche ou pas le dernier cas de charge qui a été affiché
- Deform.** affiche ou pas la dernière déformée qui a été affichée pour la structure
- Diagram.** affiche ou pas la dernière épure d'effort intérieure qui a été affichée

6.3 La déclaration d'une structure et de ses appuis

La géométrie d'une structure est définie par des points (qui représentent la position des nœuds d'assemblage) et des lignes droites (qui représentent les poutres droites). La déclaration d'une géométrie peut se faire manuellement via l'interface de **Plane Structure**, mais il est possible d'importer une géométrie de structure conçue via un logiciel extérieur :

- au format `.inp` pour une géométrie réalisée avec le générateur de dessins et de maillages **Gmsh** ;
- au format `.dxf` pour une géométrie réalisée avec un logiciel de DAO (**Qcad, Autocad, ...**).

Une géométrie importée peut, par la suite, être modifiée ou complétée au sein de **Plane Structure**. Quant au choix des sections pour les poutres et des appuis pour la structure, ils se font dans **Plane Structure**.

Dans ce qui suit on présente les différentes entités qui permettent de déclarer une structure et de lui affecter des appuis. Ces différentes entités sont présentes, sous formes de tables, dans le cadre **Structure & Supports**.

6.3.1 Les points

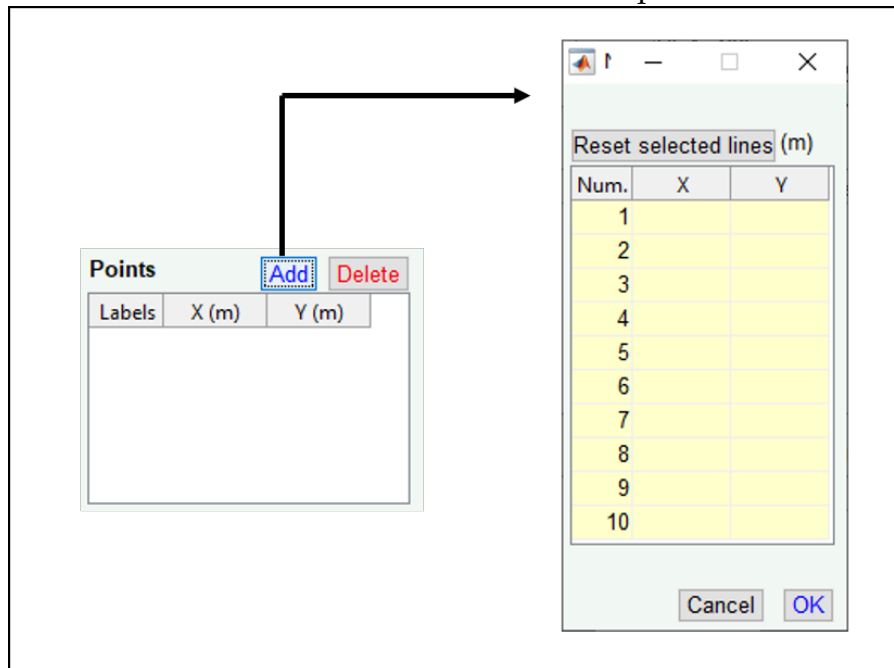
Les points sont affichés dans la table des points, par leurs deux coordonnées X et Y (en m). Ils ne sont pas déclarés directement dans table des points, mais via une fenêtre (figure-6.3.1) que génère le bouton **Add**. A chaque sollicitation, ce bouton propose la déclaration de 1 à 10 points supplémentaires.

Dès validation, les points s'affichent dans la zone graphique (matérialisés par des petits carrés bleus) et sont enregistrés dans la table des points. La numérotation des points est automatique.

Delete permet d'éliminer un ou plusieurs³ points. Une renumérotation des points est effectuée de manière automatique de 1 à n , où n est le nombre de points. Si un point est éliminé, il conduit systématiquement à l'élimination de toute entité de la structure qui l'utilise.

3. Comme de coutume, la touche Ctrl ou Shift permettent de sélectionner plusieurs points à la fois.

FIGURE 6.3.1 – Déclaration des points



6.3.2 Les sections

La table des sections (figure-6.3.2) propose une liste de sections par défaut. Cette liste, qui peut être modifiée, est celle qui sera utilisée pour affecter les sections aux poutres de la structure. Quelques boutons permettent de manipuler la liste des sections :

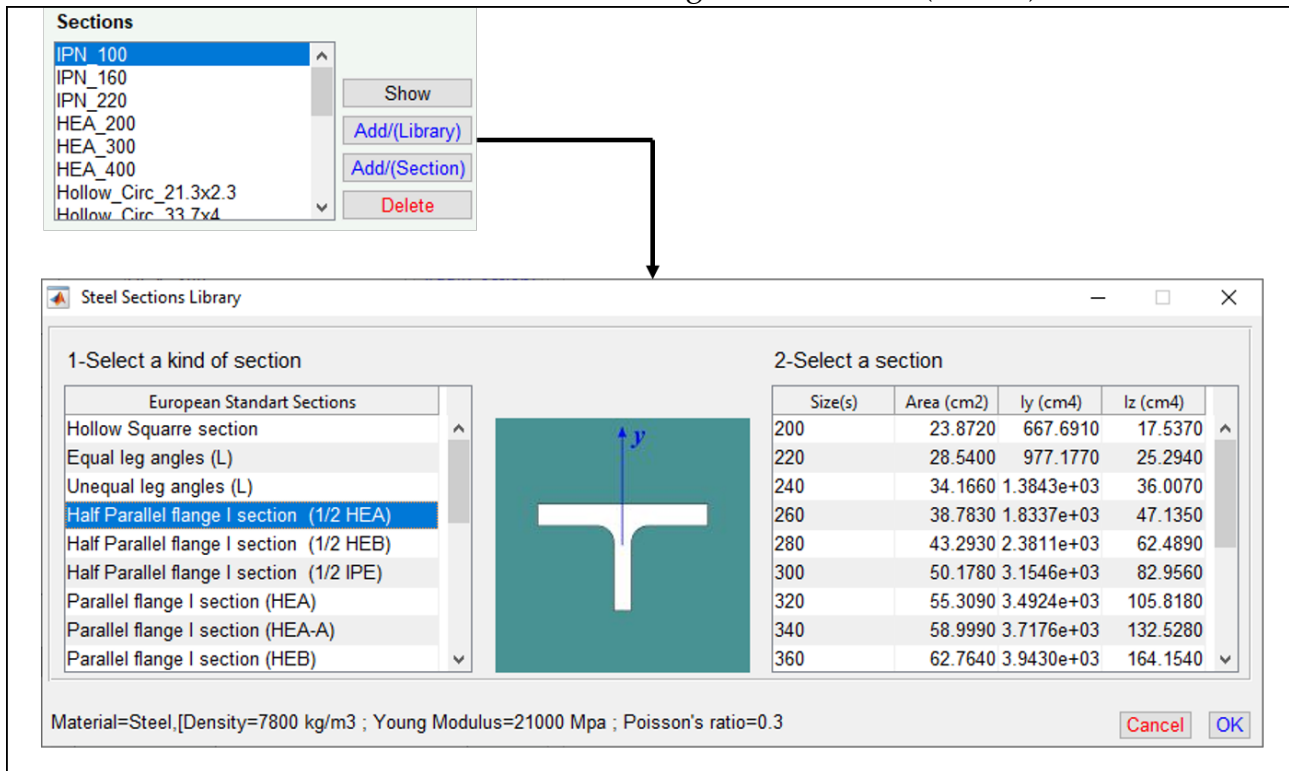
Show permet d'afficher les caractéristiques de la section sélectionnée dans la table des sections

Add(Library) permet d'ajouter une section sélectionnée dans le catalogue des sections (d'acier) normalisées. Une fenêtre s'affiche permettant de sélectionner le type de section et ses dimensions. Il est à noter que toutes les sections du catalogue ont été préalablement calculées avec **CSection**.

Add(Section) permet à l'utilisateur d'ajouter une section homogène isotrope qui a préalablement été calculée avec **CSection**, en indiquant le fichier dans laquelle elle a été sauvegardée.

Delete permet d'éliminer une section de la table des sections.

FIGURE 6.3.2 – Table des sections et Catalogue des sections (d’acier) normalisées



6.3.3 Les poutres

Les colonnes de la table des poutres (figure-6.3.3) indiquent pour chaque poutre :

- Label** le numéro de la poutre
- PO** les numéros du point Origine
- PE** les numéros du point Extrémité
- Length** la longueur de la poutre
- LO** le type de liaison à l'Origine
- LE** le type de liaison à l'extrémité
- Section** le nom de la section affectée à la poutre
- Iy/[Iz]** l'orientation de la section via le choix du moment d'inertie
- Color** la couleur de la poutre

Les poutres ne sont pas déclarées directement dans table des poutres, mais via une fenêtre (figure-6.3.1) que génère le bouton **Add**. A chaque sollicitation, ce bouton propose la déclaration de 1 à 10 poutres supplémentaires.

Cette déclaration se fait dans un premier temps par le choix des numéros de points (PO) Origine et (PE) Extrémité ;

Dès validation, les poutres s'affichent dans la zone graphique (figure-6.3.4), où elles sont matérialisés par des lignes droites bleues sur lesquelles figurent le repère local (x,y) de la

FIGURE 6.3.3 – Déclaration des poutres

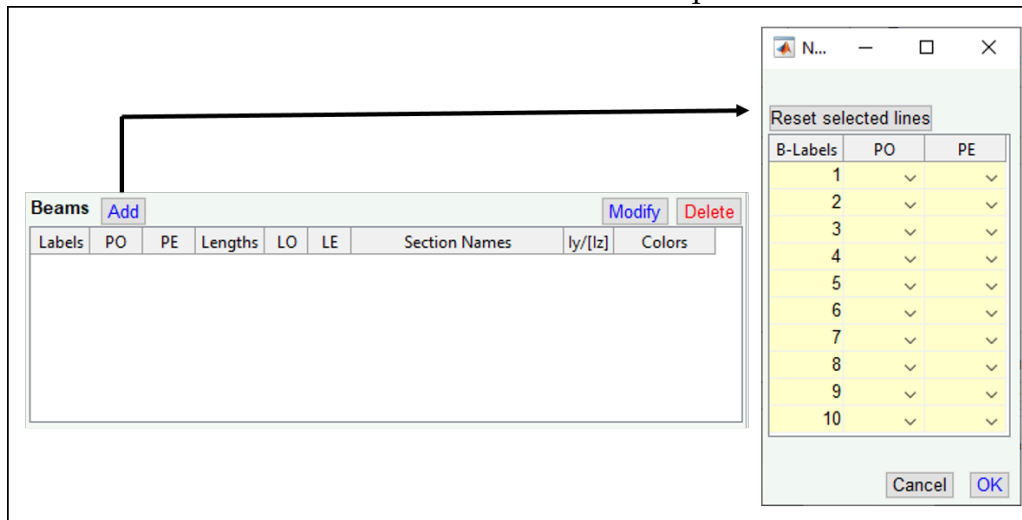
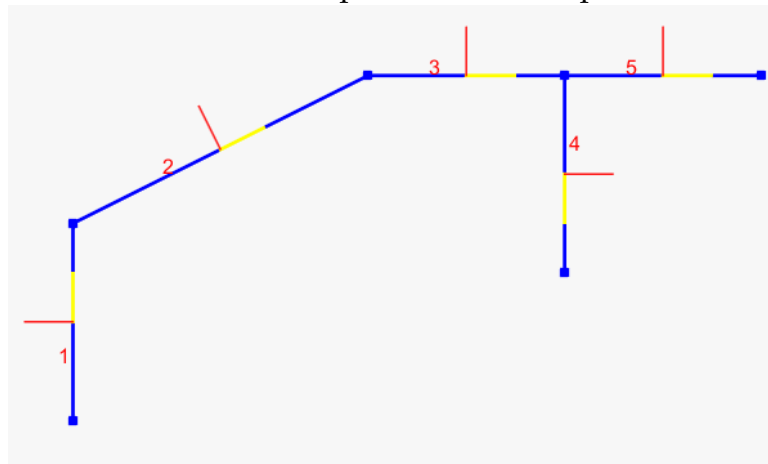


FIGURE 6.3.4 – Les poutres et leur repère local.



poutre, et elles sont aussitôt enregistrées dans la table des poutres (figure-6.3.5). La numérotation des poutres est automatique.

La déclaration d'une poutre, par la donnée de ses points extrêmes, conduit automatiquement à l'affectation :

- de ses liaisons (LO,LE) au reste de la structure : liaisons complètes par défaut
- de sa section : celle préalablement sélectionnée dans la table des sections, et à défaut de sélection, la première section qui se trouve dans la table des sections ;
- de l'orientation de la section, via le choix du moment d'inertie : I_z par défaut
- de la couleur : bleue par défaut

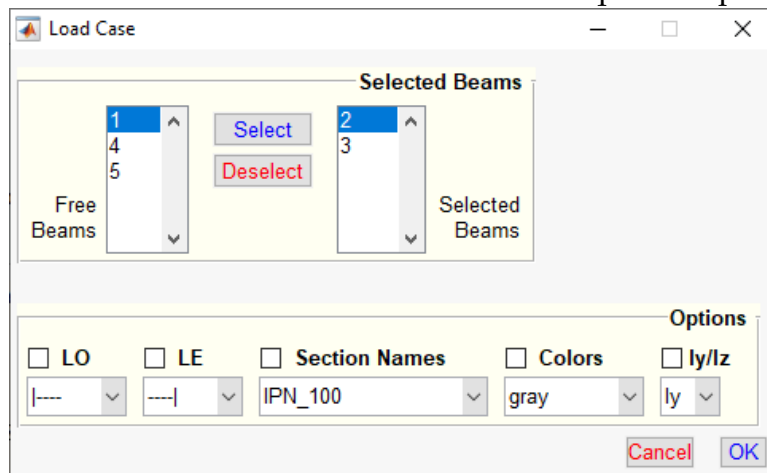
C'est dans un deuxième temps que la déclaration des poutres est précisée en apportant des *modifications* aux valeurs affectées par défaut dans la table via le bouton **Modify**. Les modifications peuvent se faire par *groupe* de poutres.

La sélection d'une poutre ou d'un groupe de poutres peut se faire

FIGURE 6.3.5 – La table des poutres.

Labels	PO	PE	Lengths	LO	LE	Section Names	ly/[lz]	Colors
1	1	2	4.00	----	----	IPN_100	lz	blue
2	2	3	6.71	----	----	IPN_100	lz	blue
3	3	4	4.00	----	----	IPN_100	lz	blue
4	4	5	4.00	----	----	IPN_100	lz	blue
5	4	6	4.00	----	----	IPN_100	lz	blue

FIGURE 6.3.6 – Modifications des caractéristiques des poutres.



- avant d’actionner le bouton **Modify**, graphiquement avec la souris : un clic sur une poutre la sélectionne (elle change de couleur) un deuxième clic la désélectionne.
- après avoir actionné le bouton.

Le bouton **Modify** affiche une fenêtre (figure-6.3.6) dans laquelle est indiquée

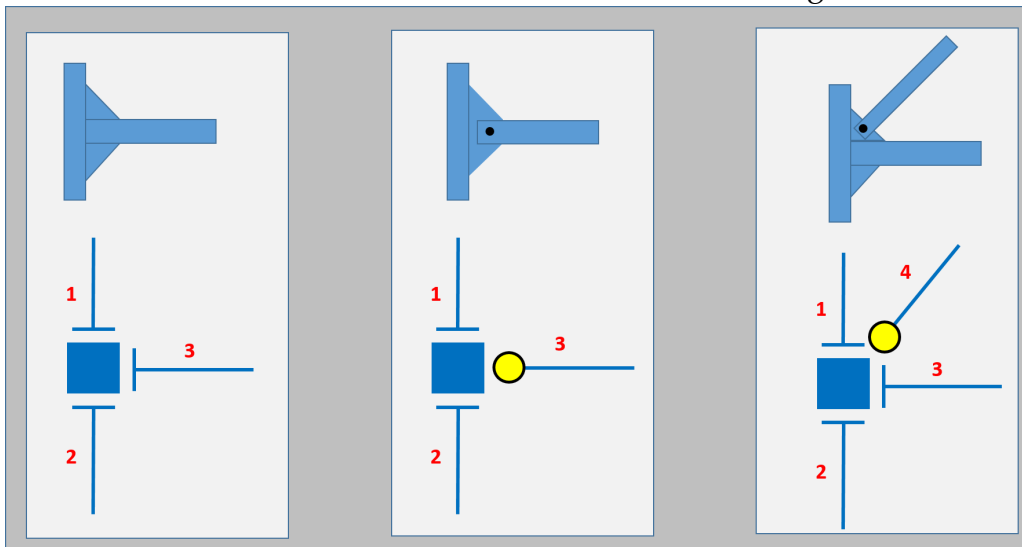
- la liste des poutres (**Selected Beams**) qui ont été préalablement sélectionnées graphiquement
- une liste du reste (**Free Beams**) des poutres de la structure

et il est encore possible, au sein de cette fenêtre de sélectionner (**Select**) ou dé-sélectionner (**Deselect**) des poutres.

Les modifications (**Options**) concernent 5 rubriques (pour lesquelles les choix sont proposées dans des listes déroulantes [↓]) : les 2 liaisons aux extrémités, la section, l’orientation de la section et la couleur de la poutre. Les modifications ne se font que pour les rubriques qui ont été cochées.

Modélisation des liaisons d’assemblage. Les liaisons aux extrémités d’une poutre aux nœuds d’assemblage sont de type *liaison complète* ou *articulation*. Il est ici utile de préciser comment doivent être déclarées les liaisons des poutres pour simuler correctement leur assemblage. Considérons les trois assemblages de la figure-6.3.7 :

FIGURE 6.3.7 – Liaisons internes et assemblages.



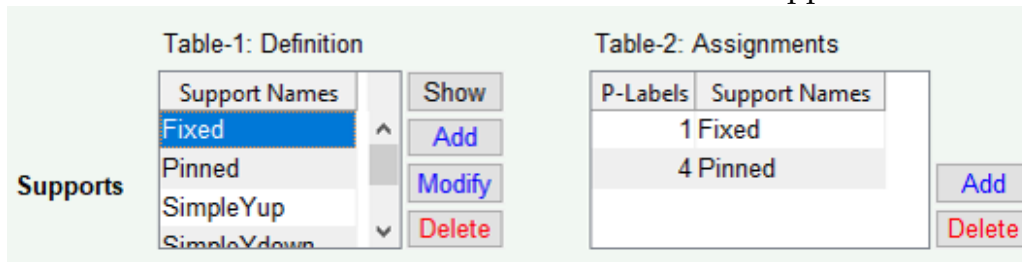
- Celui de gauche concerne deux poutres soudées : cet assemblage est représenté par 3 poutres qui aboutissent par des liaisons complètes au nœud d'assemblage.
- Celui du milieu concerne une poutre articulée sur une autre. Cet assemblage est représenté un nœud autour duquel les poutres 1 et 2 sont en liaison complète et la poutre 3 est jointe par une liaison articulée.
- Celui de droite relie par articulation une diagonale à 2 poutres soudées Cet assemblage est représenté par 3 poutres en liaison complète et la diagonale en articulation.

6.3.4 Les appuis

Pour la déclaration des appuis, **Plane Structure** utilise deux tables (figure-6.3.8) :

- table-1 pour la *définition des types d'appuis* ; cette table contient la liste de tous les types d'appuis qui ont été définis. Elle contient par défaut les types d'appuis classiques : encastrement (fixed), articulation (Pinned) et appuis simples (SimpleXleft, SimpleXleft, SimpleXleft, SimpleXleft).
- table-2 pour *affecter les appuis à la structure*, en les choisissant parmi la liste des types d'appuis disponibles dans la table-1. Par exemple dans la figure-6.3.8 : un encastrement a été affecté au nœud n°1 de la structure et une articulation au nœud n°4.

FIGURE 6.3.8 – Les tables de déclaration d'appuis.

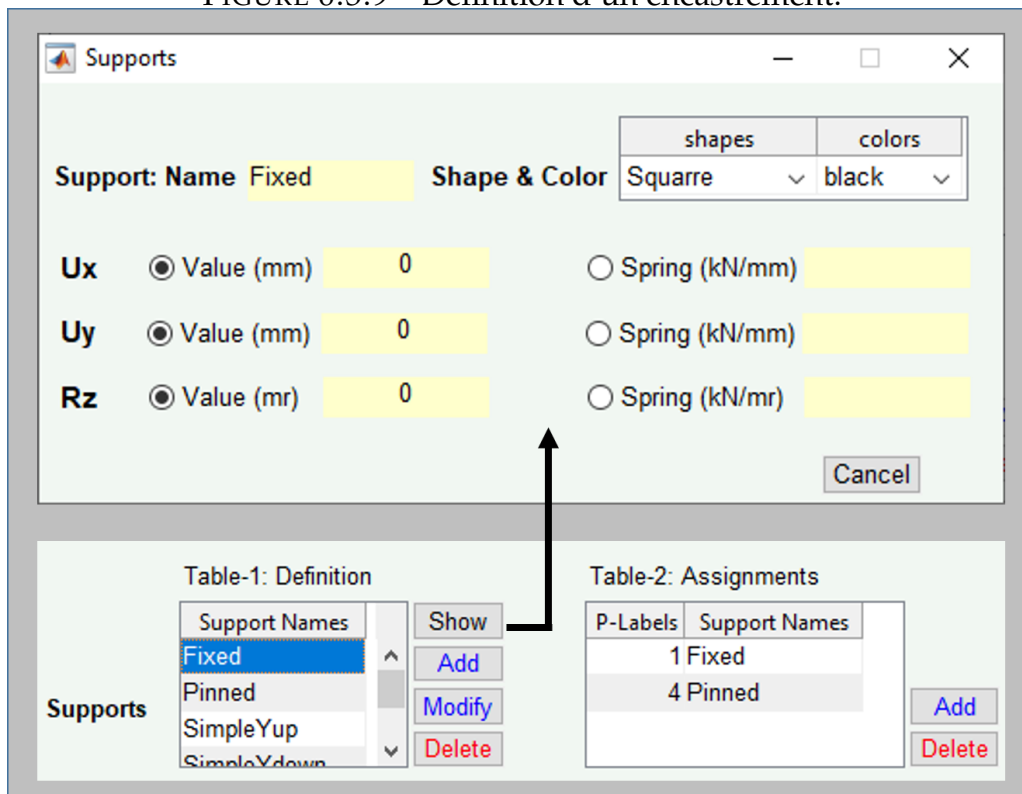


Définition des appuis. Les boutons Show, Add et Modify affiche une fenêtre (figure-6.3.9) permettant de montrer de rajouter ou de modifier un type d'appui. Dans la définition d'un type d'appui, chaque degré de liberté (DDL) de translation ou de rotation peut être (bouton radio) :

- imposé à une valeur réelle (ou nulle pour un blocage)
- ou bien associé à une rigidité élastique.

Enfin, un type d'appui porte un *nom* et il lui est associé un *symbole* et une *couleur*. Ainsi, mis à part les appuis proposés par défaut, l'utilisateur peut définir des appuis particuliers et les symboles pour les représenter au niveau graphique.

FIGURE 6.3.9 – Définition d'un encastrement.

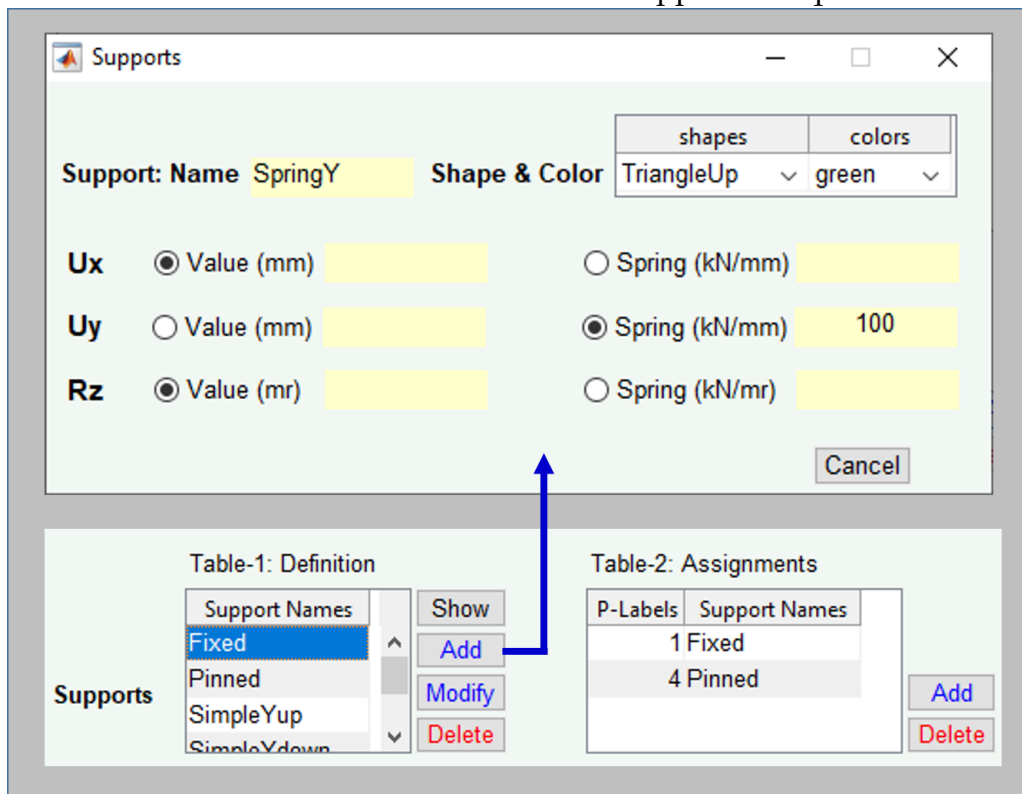


Quatre boutons accompagnent la table-1 de définition des appuis :

Show permet d'afficher, dans une fenêtre, la définition de l'appui sélectionné dans la table; par exemple, la fenêtre affichée en haut de la figure-6.3.9 indique que pour l'encastrement (Fixed) les 3 DDL sont bloqués (valeurs nulles) et que le symbole qui le représente est un carré (square) noir (black).

Add permet d'ajouter un nouveau type d'appui; par exemple la figure-6.3.10 montre la définition d'un appui élastique (SpringY) de rigidité 100kN/mm pour une translation selon l'axe Y (Uy), et le symbole pour le représenter est un triangle (TriangleUp) de couleur verte (green).

FIGURE 6.3.10 – Définition d'un appui élastique.



Modify permet de modifier un appui sélectionné dans la table. On ne peut pas modifier un type d'appui s'il est utilisé par la structure.

Delete permet d'éliminer un type d'appui. On ne peut pas éliminer un type d'appui s'il est utilisé par la structure.

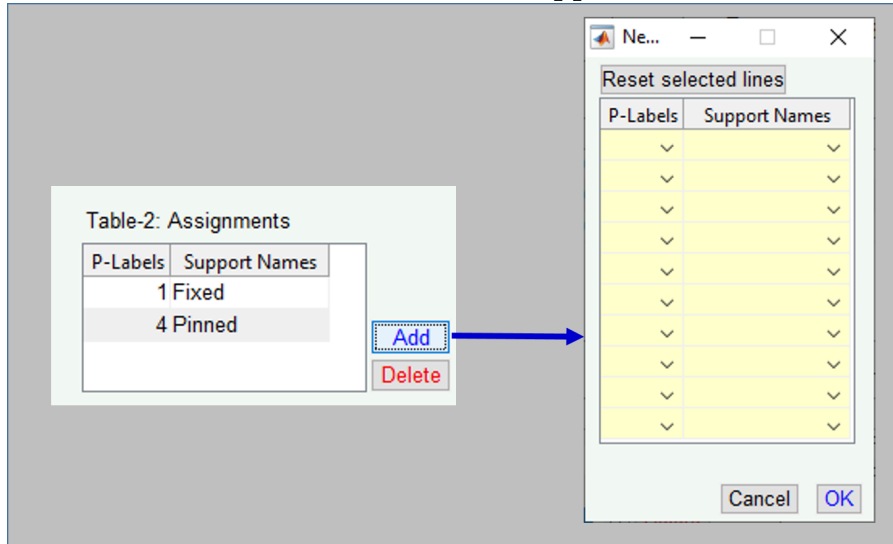
Affectation d'appuis à la structure. L'affectation des appuis aux nœuds de la structure se fait via la table-2 :

Add génère une fenêtre (figure-6.3.11) dans laquelle : la colonne P-Labels propose, dans une liste déroulante, les numéros des nœuds de la structure, et la colonne Support Names propose, dans une liste déroulante, les différents types d'appuis disponibles (qui figurent dans la table-1).

Cette fenêtre permet d'affecter des appuis aux nœuds de la structure. Dès validation, la liste des nœuds auxquels un appui a été affecté est enregistrée dans la table-2, et les appuis apparaissent par leur symbole au niveau graphique.

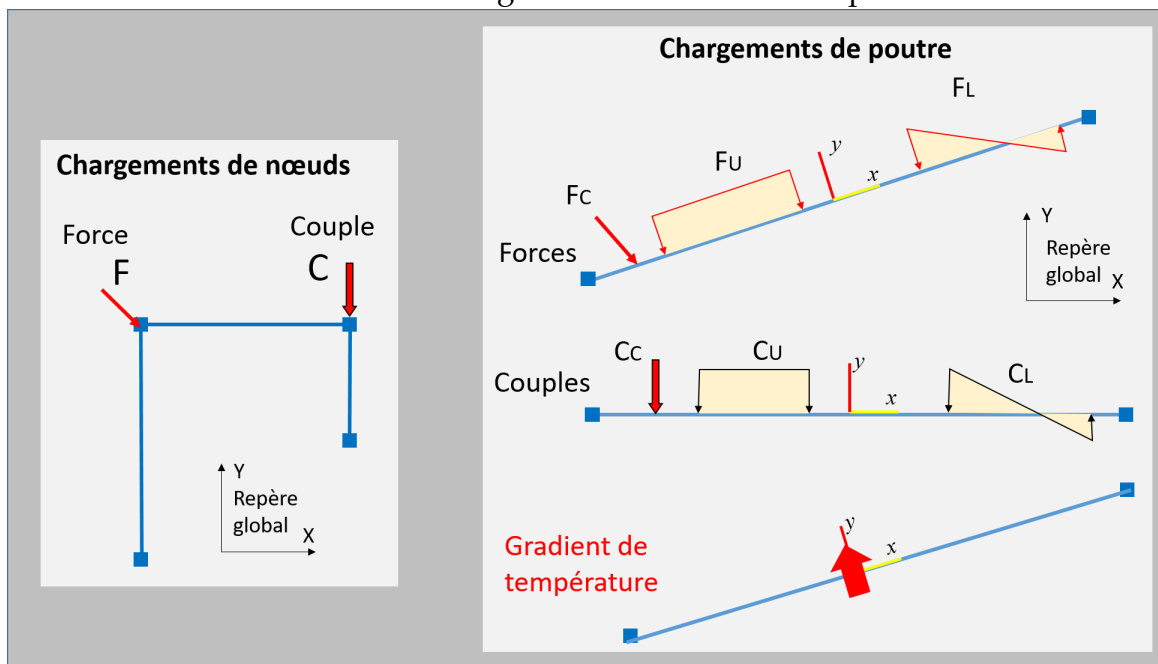
Delete permet d'éliminer un ou plusieurs appuis sélectionnés dans la table-2.

FIGURE 6.3.11 – Affectation des appuis à la structure.



6.4 La déclaration des chargements

FIGURE 6.4.1 – Chargements de nœuds et de poutres.



Les types de chargement

Dans **Plane Structure**, on peut déclarer des chargements (figure-6.4.1) :

- sur les nœuds de la structure, de type force ou couple
- sur chaque poutre de la structure
 - de type force ou couple, concentré ou réparti (uniforme ou linéaire), et selon le repère local (de la poutre) ou global (de la structure)
 - un gradient de température : la valeur d'un gradient de température est la différence de température entre les faces supérieure et inférieure de la poutre rapportée à la distance qui les sépare.

Il est par ailleurs possible, pour l'ensemble de la structure :

- d'imposer une variation globale de température
- de tenir compte de son poids propre.

La déclaration des chargements *se fait par cas de charge*, pour un nombre illimité de cas de charge. Un cas de charge est une distribution quelconque de chargements sur la structure. Dans **Plane Structure**, le cadre **Load Cases** (figure-6.4.2) est réservé à la déclaration de tous les cas de charge.

FIGURE 6.4.2 – Déclaration des chargements.

Labels	°C/cm
3	5.00
5	5.00

Case Names	Types
Dalle	pres
Fnodales	any
ForceBeams	any
FPonP2	any
Vent	pres

La déclaration des cas de charge

Cas de charge prédéfinis. Il y a 3 cas prédéfinis :

- Self Weight** le cas associé au poids propre ;
- Temperature** le cas associé à la variation globale de température dont la valeur doit être indiquée dans la case prévue à cet effet.
- Gradients** le cas qui regroupe les gradients de température imposés à certaines poutres et dont la déclaration se fait dans une table prévue à cet effet. Cette table, qui affiche la liste des poutres auxquelles un gradient de température a été imposé, offre 3 boutons :
 - **Add** affiche une fenêtre qui permet d'imposer aux poutres, désignées par leur numéro, un gradient de température particulier ($^{\circ}C/cm$)

- **Show** pour afficher ou pas, au niveau graphique, les gradients de température imposés aux poutres de la structure
- **Delete** pour éliminer les gradients de température imposés aux poutres sélectionnées dans la table.

Les autre cas de charge. En dehors de ces 3 cas de charge prédéfinis, il est possible de déclarer, via la table qui se trouve le plus à droite, deux autres types de cas de charge pour la structure :

- **any** pour définir un cas de charge absolu quelconque (figure 6.4.3)
- **press** pour définir un chargement associé à l'effet d'une force surfacique sur un ensemble de poutres de la structure (figure-6.4.5)

Cette table contient la liste des cas de charge déclarés ; elle s'accompagne de quelques boutons :

Show affiche sur la structure le chargement sélectionné dans la table

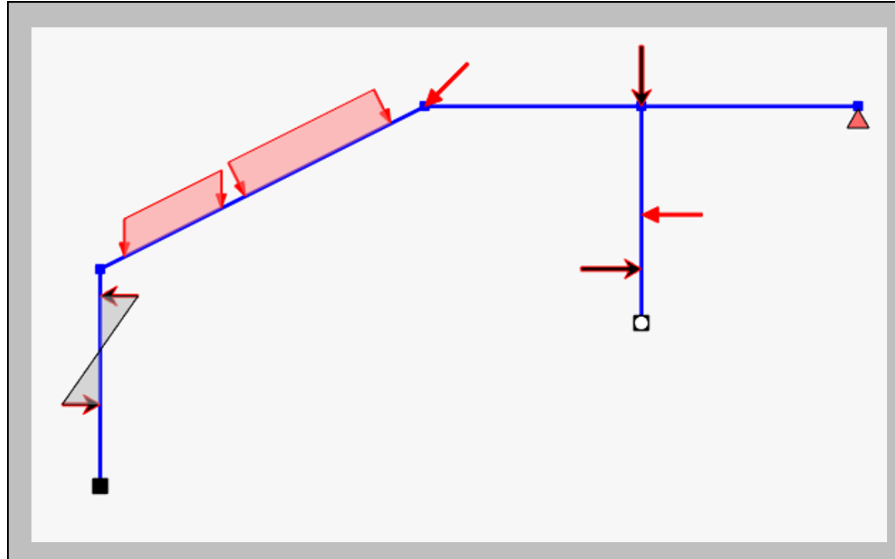
Add any permet de déclarer un nouveau cas de charge quelconque

Add press permet de déclarer un nouveau cas de charge de type **press**

Modify permet d'apporter des modifications au chargement sélectionné dans la table

Delete permet d'éliminer le chargement d'une poutre sélectionnée dans la table

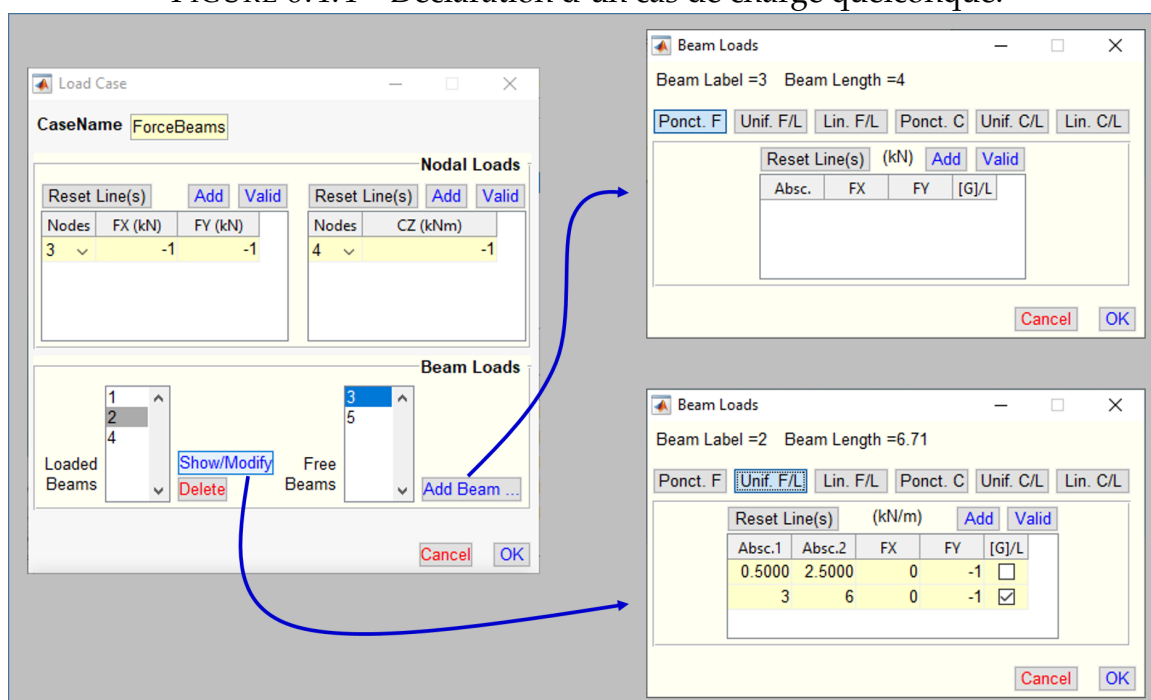
FIGURE 6.4.3 – Un cas de charge quelconque.



Le cas de charge quelconque (any). Il s'agit d'un cas de charge absolu quelconque sur la structure qui peut comprendre des chargements sur les nœuds et des chargements sur les poutres.

Les boutons **Add any** ou **Modify** qui permettent de déclarer un nouveau cas de charge quelconque ou de le modifier, affichent une fenêtre (figure- 6.4.4, gauche) qui comporte un cadre pour la déclaration des charges nodales (Nodal Loads) et un cadre pour la déclaration des chargements de poutres (Beam Loads).

FIGURE 6.4.4 – Déclaration d'un cas de charge quelconque.



Pour les charges nodales, deux tables permettent de déclarer de manière séparée les forces et les couples. Pour chaque table, **Add** permet de rajouter 3 lignes supplémentaires à chaque fois que le bouton est sollicité.

Pour les charges sur les poutres, le cadre **Beam Loads** présente la liste des poutres déjà chargées (**Loaded Beams**) et la liste des poutres libres de tout chargement (**Free Beams**).

Pour les poutres chargées (**Loaded Beams**) :

Show/Modify permet d'afficher dans une fenêtre (figure-6.4.4, en bas à droite) le chargement d'une poutre, pour éventuellement le modifier

Delete permet d'éliminer tout les chargements de la poutre sélectionnée dans la table

Pour les poutres non chargées (**Free Beams**), la sélection d'une poutre puis **Add Beam ...** affiche une fenêtre (figure-6.4.4, en haut à droite) qui permet de charger la poutre sélectionnée. Cette fenêtre précise le numéro de la poutre, la longueur de la poutre et propose 6 onglets de déclaration de chargement sur la poutre :

Ponct. F pour déclarer des forces concentrées

Unif. F/L pour déclarer des forces uniformes

Lin. F/L pour déclarer des forces linéaires

Ponct. C pour déclarer des couples concentrés

Unif. C/L pour déclarer des couples uniformes

Lin. C/L pour déclarer des couples linéaires

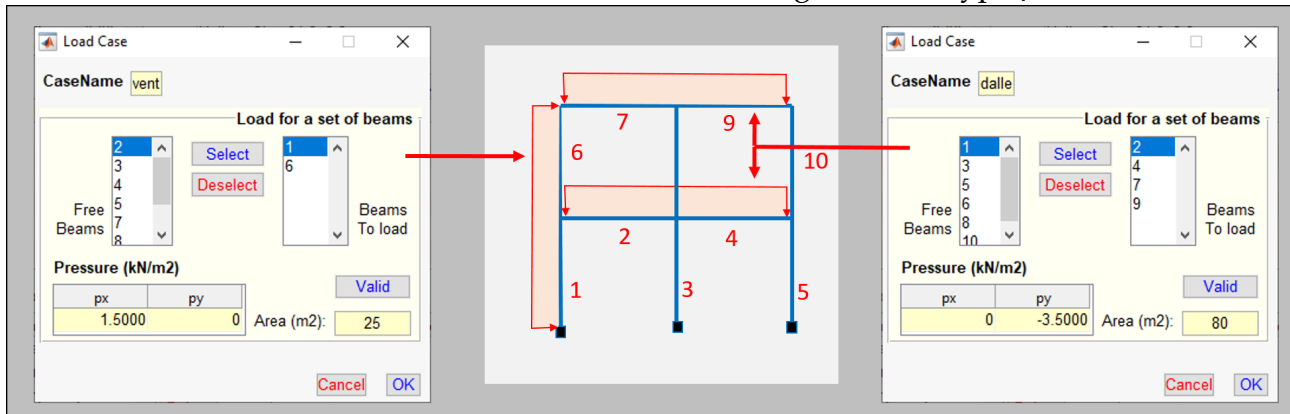
Les forces sur les poutres peuvent être déclarées dans le repère local de la poutre ou bien dans le repère global de la structure (par défaut). Le nombre de chargements sur une poutre est illimité. Pour chaque type de chargement :

Add permet de rajouter des lignes à la table,

Valid conduit à l'affichage graphique du chargement déclaré ; il permet de vérifier aussitôt que la déclaration du chargement a été correctement faite.

OK conduit à la validation et l'enregistrement du chargement déclaré.

FIGURE 6.4.5 – Déclarations de cas de chargement de type **press**.



Le cas d'une force surfacique (press). Ce type de chargement permet d'imposer, en une seule opération, une même force répartie uniforme sur un ensemble de poutres. Cela permet par exemple de simuler un vent ou le poids d'une dalle qui seraient repris par un ensemble de poutres (figure-6.4.5).

Add press ou **Modify**, qui permettent d'ajouter ou de modifier ce type de chargement, affichent (figure-6.4.5, à gauche ou à droite) une fenêtre qui contient :

- la sélection des poutres qui doivent reprendre le chargement
- la force surfacique [px,py] (en kN/m^2)
- la surface d'action de la force surfacique (en m^2)

Le logiciel multiplie la force surfacique par la valeur de la surface, et distribue la force qui en résulte de manière *uniforme* sur l'ensemble des poutres sélectionnées. Le bouton **Valid** conduit à l'affichage graphique du chargement déclaré ; il permet de vérifier aussitôt que la déclaration du chargement a été correctement faite. La validation effective du chargement se fait par **OK**.

La figure-6.4.5 donne deux exemples de chargement de type **press** :

- à gauche, la force surfacique de $1,5 kN/m^2$ selon l'axe X, dont la surface d'action est $25m^2$, doit être reprise par les poutres 1 et 6 de la structure.
- à droite, la force de $-3,5 kN/m^2$ selon l'axe Y, dont la surface d'action est $280m^2$, doit être reprise par les poutres 2, 4, 7 et 9 de la structure.

6.5 Calculs d'équilibre et résultats

Une fois la structure, les appuis et les chargements déclarés, un calcul d'équilibre peut être exécuté.

Dans la barre des menus, **Analyse** > **Equilibrium**, permet d'afficher le cadre réservé aux calculs d'équilibre. Ce cadre est séparé en deux : en bas figure le bouton **Solve** et la partie supérieure est réservée à l'affichage des résultats du calcul d'équilibre dès sa résolution.

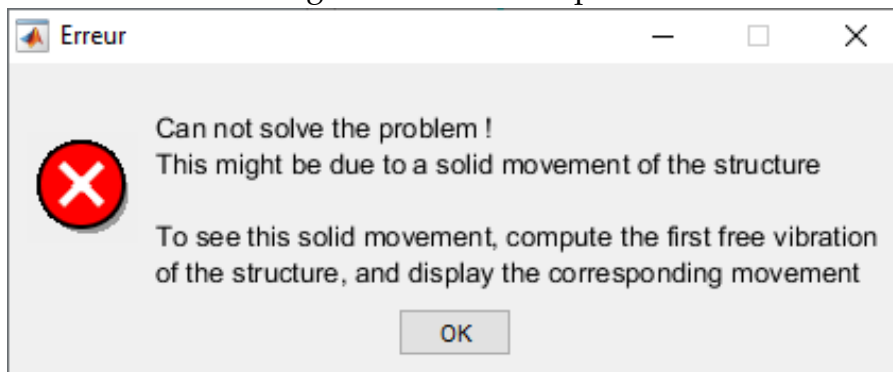
6.5.1 La résolution

Le bouton **Solve** lance la résolution de l'équilibre pour tous les cas de charge qui ont été déclarés.

Cependant, si la structure comporte le moindre *mécanisme* local ou global, la résolution est interrompue, et le logiciel affiche le message d'erreur indiqué dans la figure-6.5.1.

Ce message signale que le problème ne peut être résolu, et que cela est probablement dû à la présence d'un mécanisme (ou plusieurs) dans la structure. Pour visualiser ce(s) mécanisme(s), le message suggère de visualiser les premiers modes de vibration de la structure. Les mécanismes sont les modes de vibration de fréquences nulles. Leur visualisation (et animation) devrait aider à corriger la structure et à éliminer le(s) mécanisme(s).

FIGURE 6.5.1 – Message d'erreur dû à la présence de mécanisme.

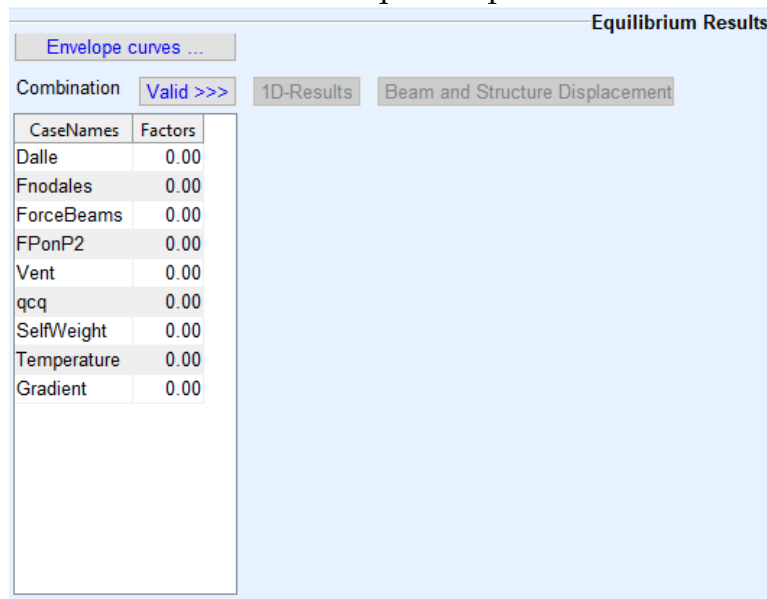


Si la structure ne présente pas de mécanisme, la résolution a lieu et conduit à l'affichage dans le cadre **Equilibrium Results**, de quelques boutons et en particulier d'une table dans laquelle figure une combinaison (nulle) de cas de charges (figure-6.5.2). Cet affichage signifie que la résolution a bien eu lieu et qu'elle l'a été pour tous les cas de charge listés dans la table de combinaison et identifiés par leur nom.

Dans **Plane Structure**, l'affichage ou l'exploitation des résultats de calcul ne se fait par *combinaison de cas de charge*.

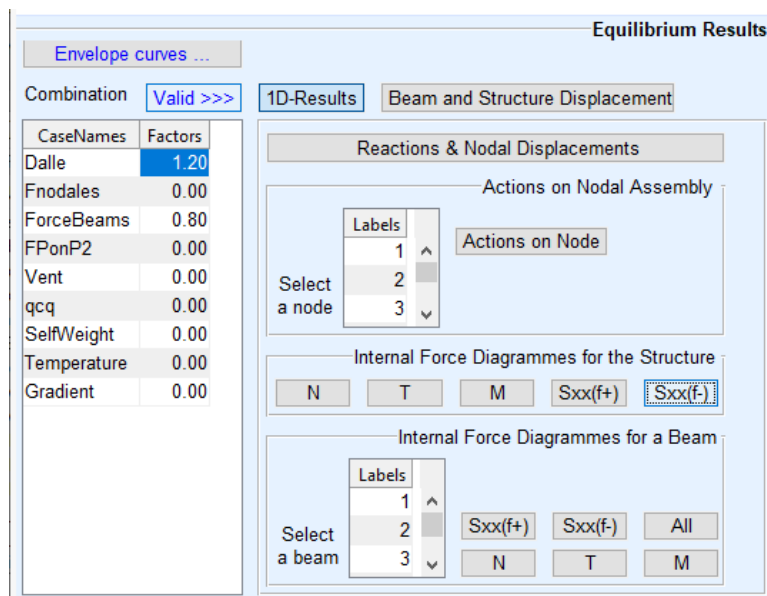
Pour voir des résultats, l'utilisateur doit déclarer une combinaison de cas de charge par l'introduction des facteurs qui lui sont associés dans la colonne **Factors** de la table de combinaison (pour voir les résultats d'un cas de charge particulier, il suffit de lui associer le facteur 1, et garder les autres nuls).

FIGURE 6.5.2 – Résolution de l'équilibre pour tous les cas de charge.



Pour une combinaison de cas de charge, **Valid >>>** génère l'affichage d'un ensemble d'onglets permettant d'accéder aux différents résultats qui correspondent à la combinaison choisie (figure-6.5.3).

FIGURE 6.5.3 – Validation d'une combinaison de cas de charge.

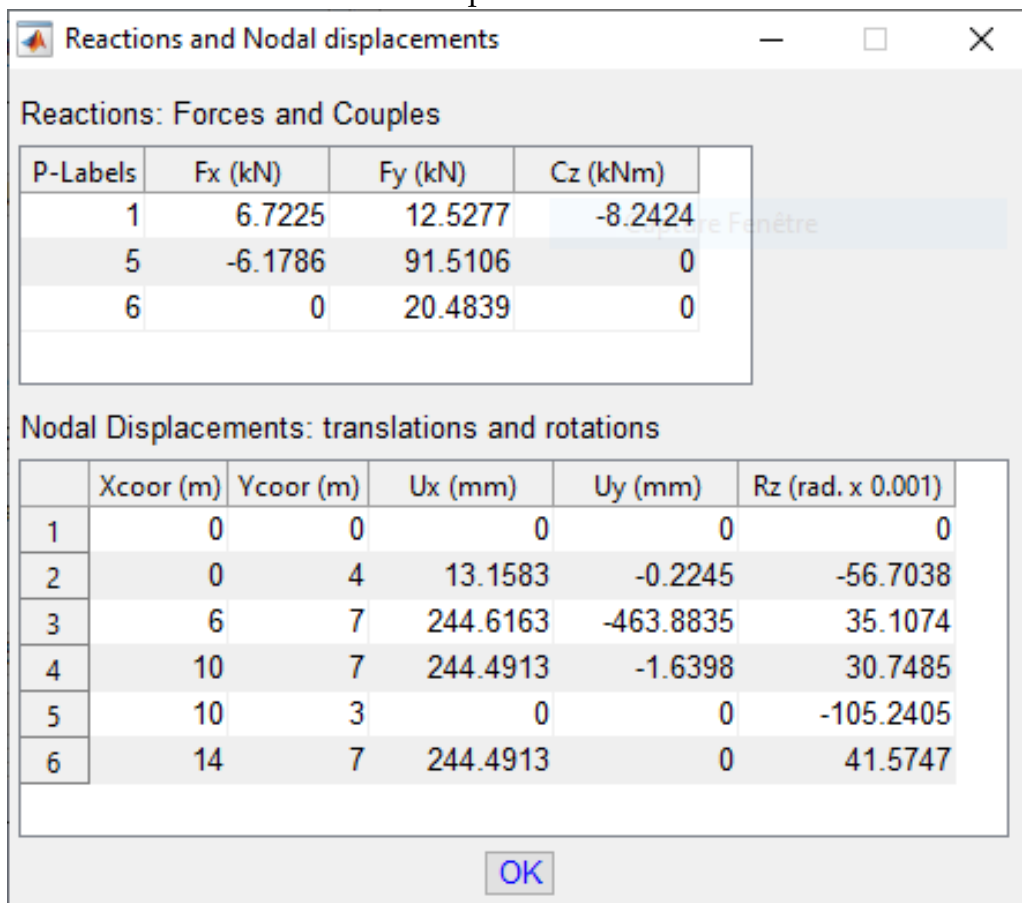


6.5.2 Les résultats

Sous l'onglet 1D-Results (figure-6.5.3) :

Reactions & Nodal Displacements affiche dans une fenêtre les réactions aux appuis et les déplacements des nœuds de la structure (figure-6.5.4) ;

FIGURE 6.5.4 – Réactions et déplacements des nœuds de la structure.



Actions on Nodes affiche (figure-6.5.5) , pour un nœud sélectionné dans la table qui lui est associée les actions des différentes poutres qui aboutissent au nœud

N, T, M, Sxx(f+), Sxx(f-), du cadre Internal Force Diagrammes for the Structure affichent dans la zone graphique les épures de l'un des efforts intérieurs sélectionné ou de l'une des deux contraintes sélectionnée (fibre supérieure ou inférieure);

N, T, M, Sxx(f+), Sxx(f-), All, du cadre Internal Force Diagrammes for a Beam affichent dans une fenêtre :

- le diagramme (figure-6.5.6) de l'un des efforts intérieur sélectionné ou de l'une des deux contraintes; le diagramme est accompagné d'une table de valeurs de l'effort intérieur pour différentes abscisses sur la poutre, avec une valeur à gauche et une valeur à droite en cas de discontinuité);
- ou bien (figure-6.5.7) l'ensemble des 5 diagrammes ;

L'onglet Beam and Structure Displacement (figure-6.5.8) affiche :

- une table, Max Beam Deflections, qui donne pour chaque poutre le lieu et la valeur de la déflexion (déplacement transversal à la poutre) maximale.
- et propose deux boutons pour afficher (Display) la déformée (figure-6.5.9) de la structure, et l'animer (anime); ampl. permet d'amplifier la déformée.

FIGURE 6.5.5 – Actions sur un nœud d'assemblage.

Beam Actions on the Nod...

Forces and Couples

B-Labels	Fx (kN)	Fy (kN)	Cz (kNm)
3	1.6220	-1.4247	4.3155
4	-1.6220	1.3815	-3.4882
5	0	0.0432	0.1727

OK

FIGURE 6.5.6 – Diagramme de l'effort tranchant pour une poutre de la structure.

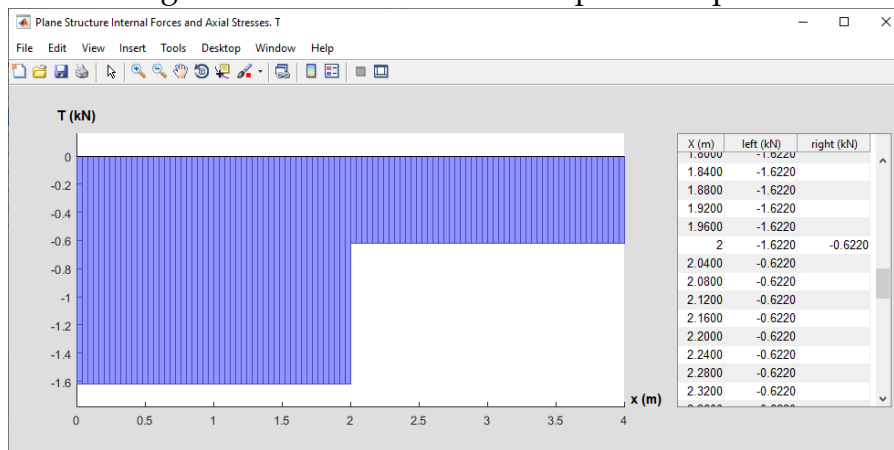


FIGURE 6.5.7 – Les différents diagrammes pour une poutre de la structure.

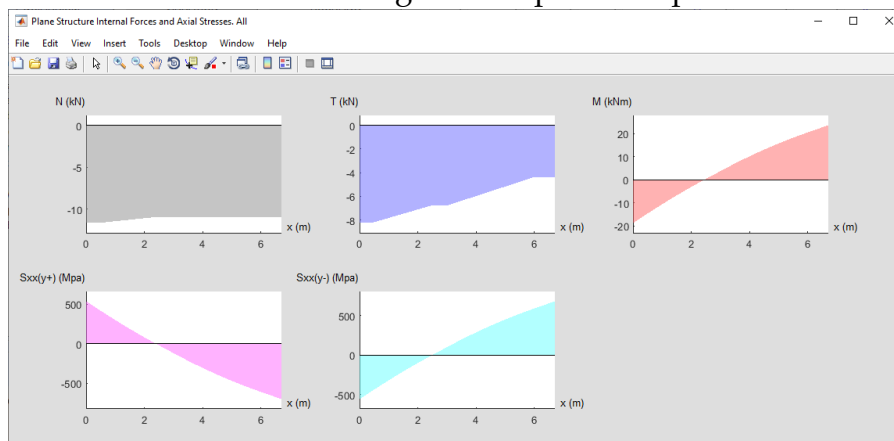


FIGURE 6.5.8 – Les résultats de déformées de poutres et de structure.

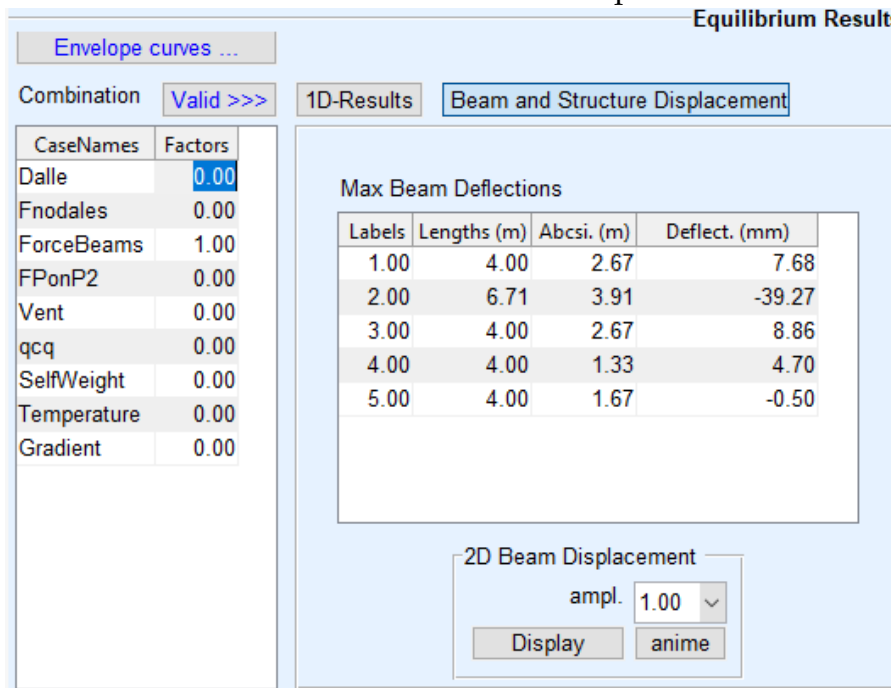
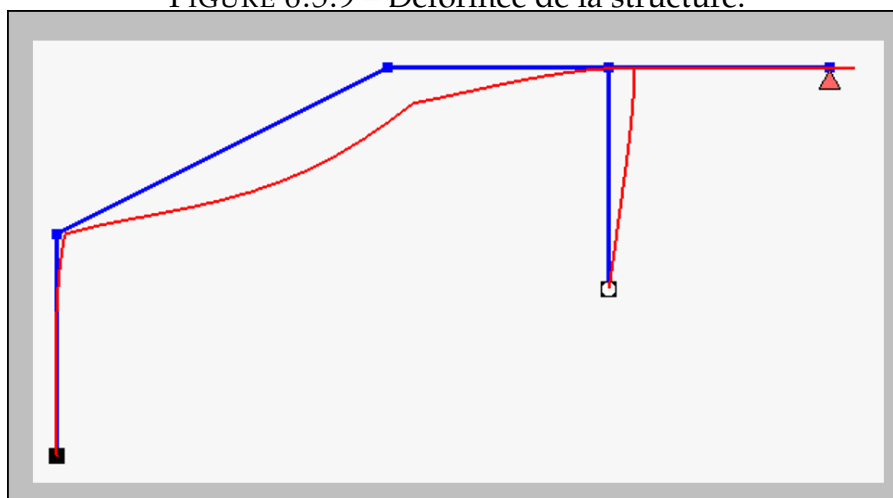


FIGURE 6.5.9 – Déformée de la structure.



Calculs d’enveloppes. Le bouton **Enveloppe Curves** (figure-6.5.3, haut) affiche une fenêtre (figure-6.5.10) permettant l’obtention, pour une poutre de la structure, l’enveloppe d’un effort intérieur (ou les enveloppes de tous les efforts intérieurs) correspondant à n combinaisons de charge choisies par l’utilisateur. Trois étapes sont nécessaires pour obtenir le ou les enveloppes :

1. définir les n combinaisons (10 colonnes sont proposées par défaut, mais **Add** permet d’ajouter, à chaque fois qu’il est sollicité, 4 nouvelles colonnes pour des combinaisons supplémentaires) puis valider (**Valid**) les n combinaisons déclarées.
2. sélectionner une poutre (**Select a beam**) dans la liste des poutres
3. choisir l’effort intérieur pour lequel l’enveloppe doit être affichée. La figure-6.5.11 montre une enveloppe d’effort tranchant obtenue pour la poutre n°2.

FIGURE 6.5.10 – Fenêtre du calcul des enveloppes.

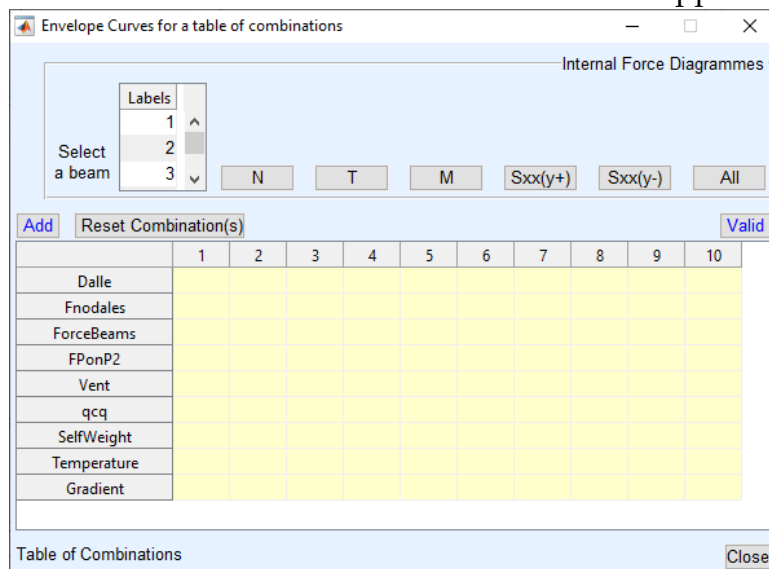
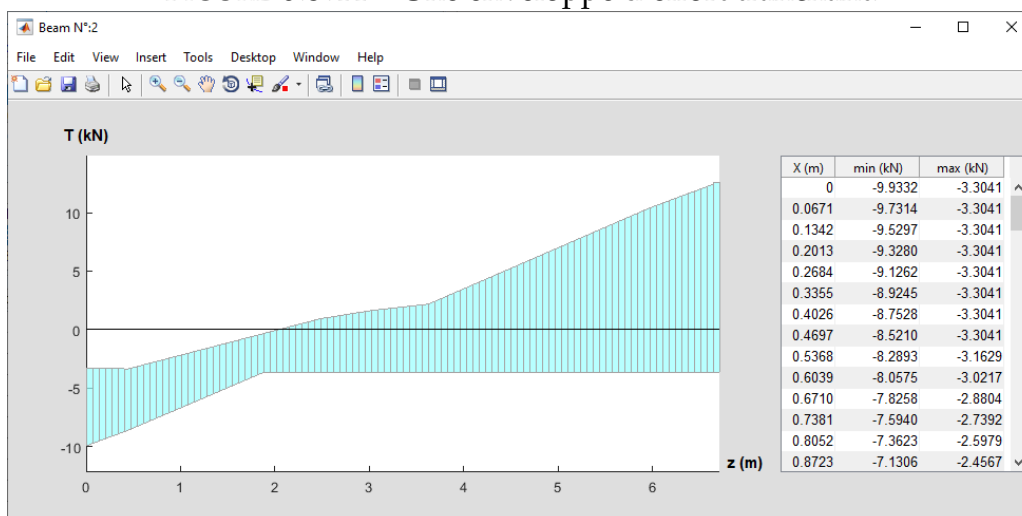


FIGURE 6.5.11 – Une enveloppe d’effort tranchant.



6.6 Calculs de vibrations et résultats

Les calculs de vibration de la structure fournissent :

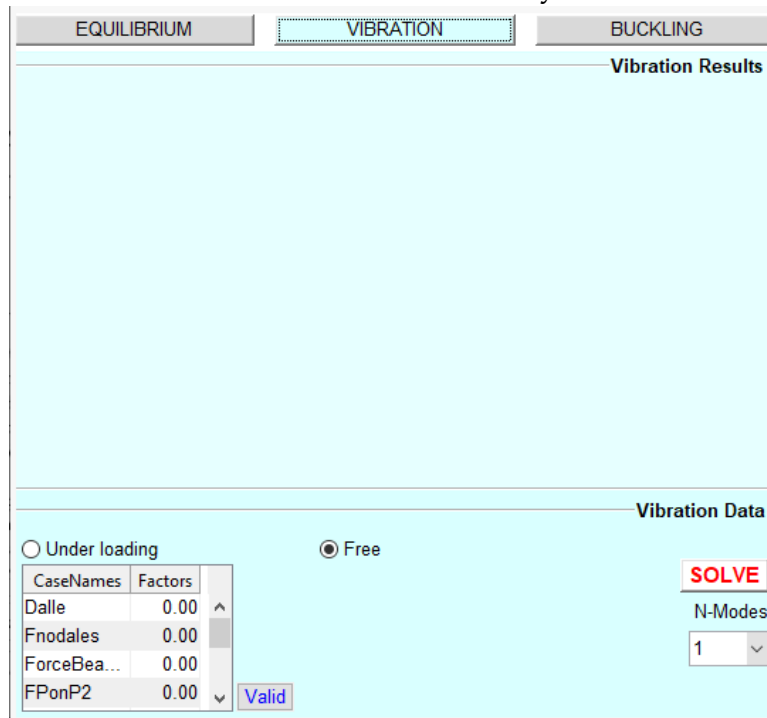
- les premiers⁴ modes de vibrations naturelles et leur fréquence ;
- ou les premiers modes de vibration autour d'un état chargé et leur fréquence.

Pour peu que l'option Vibration ait été sélectionnée via **Analyses Options** de la barre des menus, **Analyses** fait apparaître (figure-6.6.1) sous l'onglet Vibration, une zone d'analyse scindée en deux cadres :

Vibration Data dédié à la déclaration des données d'un calcul de vibration

Vibration Results dédié à l'affichage des résultats dès que les calculs de vibration sont effectués.

FIGURE 6.6.1 – Le cadre réservé à l'analyse des vibrations.



6.6.1 Les données

Les données, dans le cadre Vibration Data, sont :

N-Modes le nombre de modes souhaités (1 à 10)

Free le bouton radio qu'il faut sélectionner pour un calcul de vibrations libres (ou naturelles)

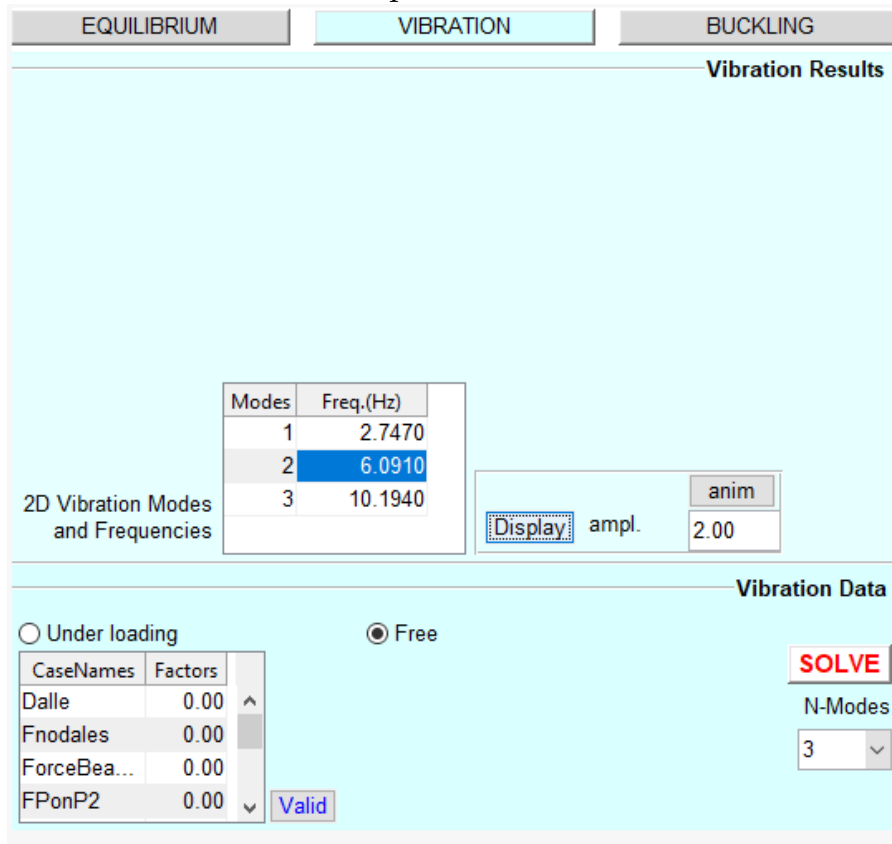
Under loading le bouton radio qu'il faut sélectionner pour un calcul de vibrations autour d'un état chargé défini par une combinaison (validée) de cas de charge.

Solve permet, une fois les données précisées, de lancer le calcul de vibration.

4. le nombre de modes est ≤ 10 .

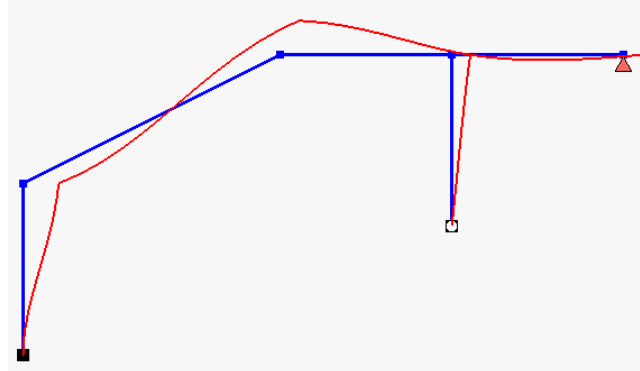
6.6.2 Les résultats

FIGURE 6.6.2 – Résultats pour un calcul de vibrations libres.



Dès résolution, il apparaît dans le cadre supérieur (figure-6.6.2), une table contenant les valeurs (en Hz) des premières fréquences; et il est possible d'afficher et d'animer le mode de vibration de la structure correspondant à une fréquence sélectionnée dans la table des fréquences. La figure-6.6.3 montre la déformée de la structure correspondant au deuxième mode de vibration et dont la fréquence est de 6.0910 Hz.

FIGURE 6.6.3 – Déformée de la structure associée au deuxième mode de vibration libre.



6.7 Calculs de Flambement et résultats

Les calculs de flambement de la structure fournissent :

- les premiers modes de flambement et leur charge critique pour l'amplification d'un chargement à partir de l'état naturel ;
- les premiers mode de flambement et leur charge critique pour l'amplification d'un chargement, à partir d'un état préchargé.

Pour peu que l'option Buckling ait été sélectionnée via **Analyses Options** de la barre des menus, **Analyses** fait apparaître (figure-6.7.1) sous l'onglet **Buckling**, une zone d'analyse scindée en trois cadres, dont deux concernent les calcul de flambement de la structure :

Buckling Data dédiée aux données d'un calcul de flambement de structure

Buckling Results dédié à l'affichage des résultats dès que les calculs de flambement sont effectués.

FIGURE 6.7.1 – Calculs de flambement.

The screenshot shows the 'BUCKLING' tab in a software interface. It is divided into three main sections:

- Effective Lengths:** Contains a 'Loading' table, a 'Labels' list, and a 'SOLVE' button.

CaseNames	Factors
Dalle	0.00
vent	0.00
SelfWeight	0.00

Labels
1
2
3
4

Labels	F0 (kN)	EfLe
- Buckling Results:** An empty area for displaying results.
- Buckling Data:** Contains 'Permanent loading' and 'Amplified loading' tables, a 'SOLVE' button, and an 'N-Modes' dropdown.

CaseNames	Factors
Dalle	0.00
vent	0.00
SelfWeight	0.00

CaseNames	Factors
Dalle	0.00
vent	0.00
SelfWeight	0.00

6.7.1 Les données

Les données, dans le cadre **Buckling Data**, sont :

N-Modes le nombre de modes souhaités (1 à 10)

Amplified Loading le chargement qu'il faut amplifier; ce chargement étant défini par une combinaison (validée) de cas de charge.

Permanent loading qu'il faut cocher pour un calcul de flambement correspondant à l'amplification du chargement (**Amplified Loading**) à partir d'un état préchargé (stable); ce préchargement étant aussi défini par une combinaison (validée) de cas de charge.

Solve permet, une fois les données précisées, de lancer le calcul de flambement.

6.7.2 Les résultats

Dès résolution, il apparaît (figure-6.7.2) dans le cadre **Buckling Results**, une table contenant les valeurs critiques de l'amplification du chargement. et il est possible d'afficher pour chaque valeur critique la déformée de la structure correspondant au mode de flambement qui lui est associé.

En l'occurrence dans la (figure-6.7.2), il s'agit du calcul des 2 premiers modes de flambement de la structure (figure-6.7.3, gauche) pour l'amplification du chargement dénommé **Dalle** (la combinaison étant ici réduite à la contribution d'un seul cas de charge (**Dalle**) avec un facteur 1). Le résultat de calcul a conduit à deux valeurs critiques 10.362 et 23.056; le mode de flambement de la structure correspondant à la première valeur critique est affichée figure-6.7.3 (droite).

FIGURE 6.7.2 – Calculs de flambement : données et résultats.

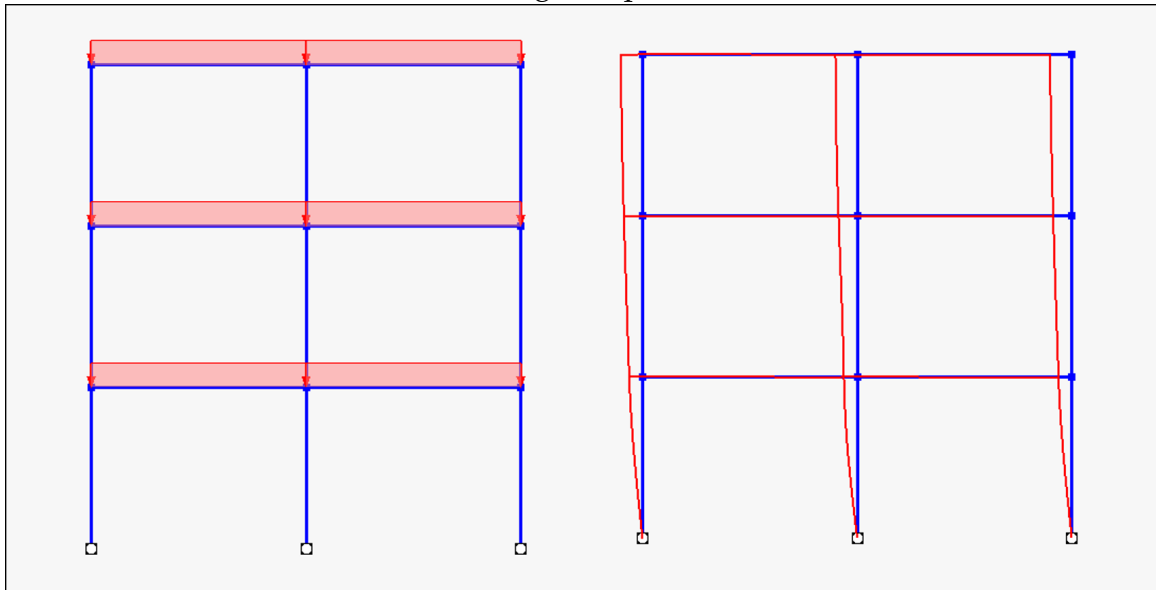
The screenshot displays two panels from a software interface. The top panel, titled "Buckling Results", contains a table with two columns: "Modes" and "Crit. ampl.". The table lists two modes: Mode 1 with a critical amplification of 10.3620, and Mode 2 with a critical amplification of 23.0560. To the right of the table is a "Display" button, an "anim" button, and a dropdown menu set to "1.00". The bottom panel, titled "Buckling Data", has a "Permanent loading" checkbox which is unchecked. It features two tables. The left table, "CaseNames Factors", lists "Dalle" (0.00), "vent" (0.00), and "SelfWeight" (0.00). The right table, "Amplified loading", lists "Dalle" (1.00), "vent" (0.00), and "SelfWeight" (0.00). A "Valid" button is located below each table. On the right side of the "Buckling Data" panel, there is a red "SOLVE" button and an "N-Modes" dropdown menu set to "2".

Modes	Crit. ampl.
1	10.3620
2	23.0560

CaseNames	Factors
Dalle	0.00
vent	0.00
SelfWeight	0.00

CaseNames	Factors
Dalle	1.00
vent	0.00
SelfWeight	0.00

FIGURE 6.7.3 – Structure chargée et premier mode de flambement.



6.8 Calculs de longueurs de flambement

Le module **Plane Structure** assure le calcul de la longueur de flambement d'un quelconque élément de la structure, en prenant en compte ou pas le chargement de la structure.

Pour peu que l'option **Buckling** ait été sélectionnée via **Analyses Options** de la barre des menus, **Analyses** fait apparaître (figure-6.7.1) sous l'onglet **Buckling**, une zone d'analyse scindée en trois cadres : celui du haut, **Effective Lengths**, concerne les calculs de longueurs de flambement d'un ou plusieurs éléments de la structure.

Dans ce cadre (figure-6.8.1) :

Select beams permet de sélectionner les poutres pour lesquelles les longueurs de flambement doivent être calculées.

Loading correspond au chargement à éventuellement considérer pour la structure (en cochant la case) ; un chargement étant défini par une combinaison (validée) de cas de charge.

Solve pour lancer le calcul des longueurs de flambement.

Dès résolution, les résultats apparaissent dans la table de droite pour chacune ses poutres sélectionnées.

La figure-6.8.2 montre à droite, le résultat obtenu pour le calcul des longueurs de flambement des poutres 1, 8 et 15 de la structure affichée à gauche (ce calcul a été effectué sans considérer de chargement). Les résultats indiqués dans la table donnent :

- colonne **EfLe**, les valeurs de 1.35, 1.09 et 1.06 respectivement pour les poutre 1, 8 et 15.
- colonne **F0(kN)**, les valeurs de références $\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ correspondant à chacune des poutres ; ces valeurs sont ici identiques parce que les poutres sont de même longueur et de même section.

FIGURE 6.8.1 – Analyse des longueurs de flambement.

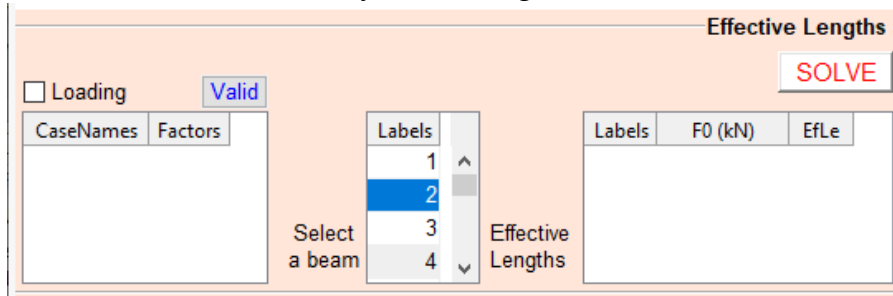
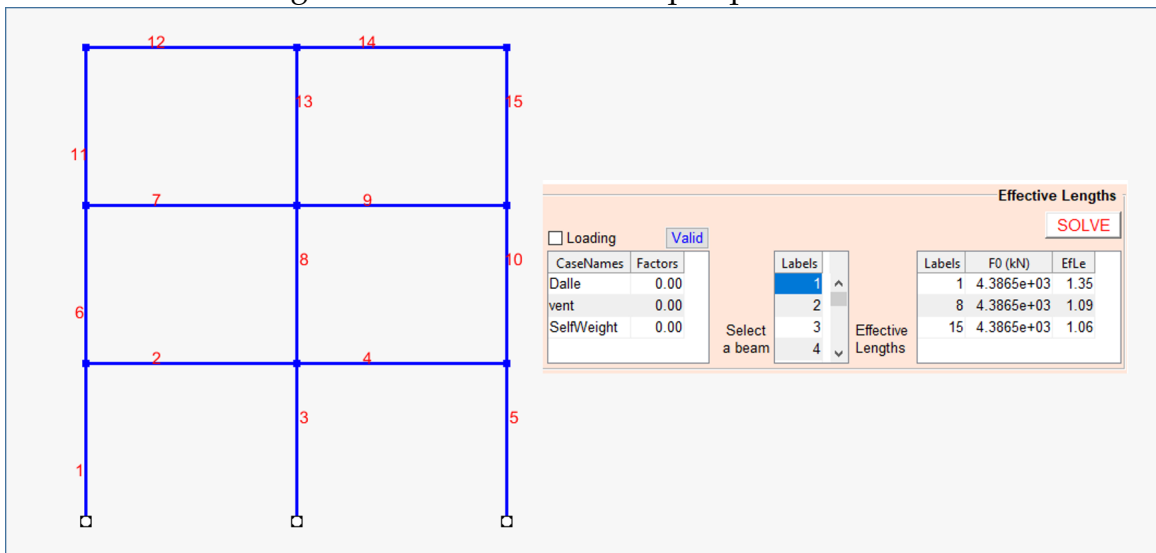


FIGURE 6.8.2 – Longueurs de flambement de quelques éléments d'une structure.



Chapitre 7

Le module Spatial Beam

Sommaire

7.1	Introduction	100
7.2	L'interface de Spatial Beam	101
7.3	La déclaration de la poutre et de ses appuis	102
7.3.1	L'utilisation d'une section	102
7.3.2	La génération de la poutre	103
7.3.3	Les appuis	104
7.4	La déclaration des chargements	106
7.4.1	Les types de chargement	106
7.4.2	Les déclarations de cas de charge	107
7.5	Options de calcul	110
7.6	Calculs d'équilibre	111
7.6.1	Les résultats	111
7.7	Calculs de vibrations	116
7.7.1	Les données	116
7.7.2	Les résultats	117
7.8	Calculs de flambement	118
7.8.1	Les données	118
7.8.2	Les résultats	119

7.1 Introduction

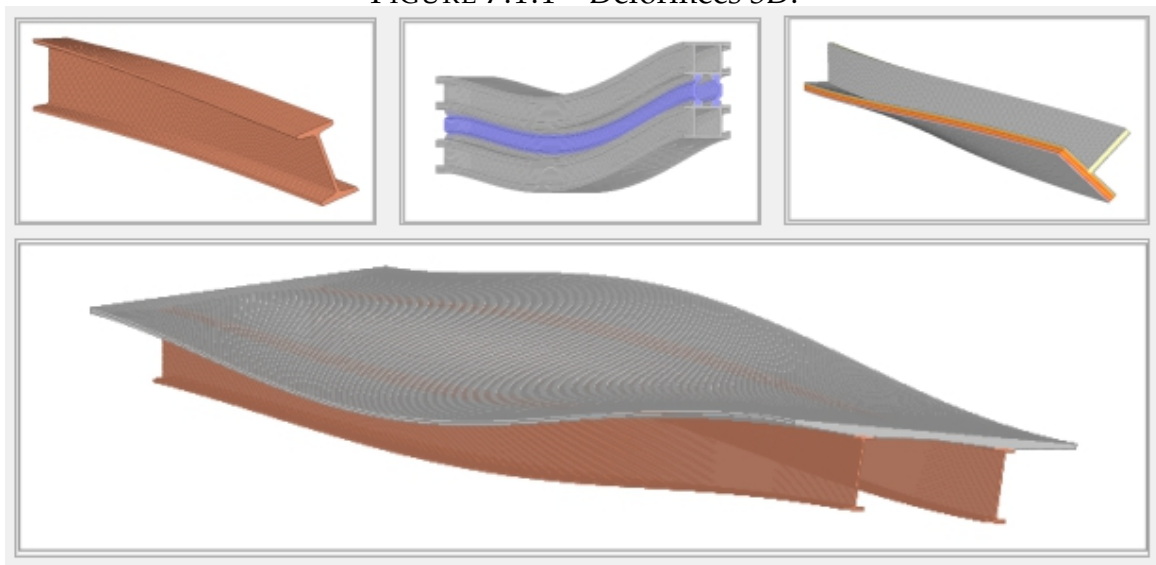
Spatial Beam traite une poutre droite de section constante sur plusieurs appuis soumises à des chargements quelconques de type mécanique ou variation de température. La section, qui est supposée préalablement calculée avec le module de calcul de section **CSection**, peut être de forme quelconque et constituée de plusieurs matériaux (isotropes ou anisotropes) librement agencés.

Qu'il s'agisse de calculs d'équilibre, de vibration ou de flambement, deux méthodes de calcul sont proposées :

- selon la méthode *classique* désignée par **CBT** (Classical Beam Theory), telle qu'elle est précisée dans l'Annexe-A ;
- selon une méthode *avancée*, désignée par **RBT** (Refined Beam Theory), dont l'essentiel est présenté dans l'Annexe-B

Il est à ce propos, recommandé de parcourir les Annexes-A-B, pour une utilisation cohérente de **Spatial Beam**.

FIGURE 7.1.1 – Déformées 3D.



Mis à part le caractère quelconque de la section (homogène ou hétérogène) et le fait que la poutre est dans l'espace, qu'y a-t-il de particulier dans ce module ?

- si le calcul est mené selon **CBT**, ce module est en mesure de fournir à l'équilibre, au-delà de la solution 1D (en termes d'efforts intérieurs et de mouvement), la *solution 3D intérieure* (loin des bords) en termes de mouvement et surtout en termes de contraintes dans *chacun* des matériaux de la section.
- si le calcul est mené selon **RBT**, ce module permet, en plus, de rendre compte :
 - de la localisation précise du chargement 3D sur la poutre
 - de la distribution réelle du champ de température pour des conditions quelconques de température (conduction et convection) imposées le long de la poutre

- des effets de bords dus aux conditions d'extrémité (par exemple l'effet d'une déformation gênée au droit d'un encastrement, ou bien les effets de la présence d'un diaphragme dans une poutre en caisson).

Enfin, au niveau visuel, la déformée d'une poutre est proposée en 3D, qu'il s'agisse d'équilibre, de mode de vibration ou de mode de flambement (figure- 7.1.1), ce qui apporte un effet *réaliste* aux simulations effectuées par **Spatial Beam**.

7.2 L'interface de Spatial Beam

La figure-7.2.1 présente l'interface du module. En dehors de la zone (en haut à gauche) réservée aux affichages graphiques, cette fenêtre offre plusieurs cadres :

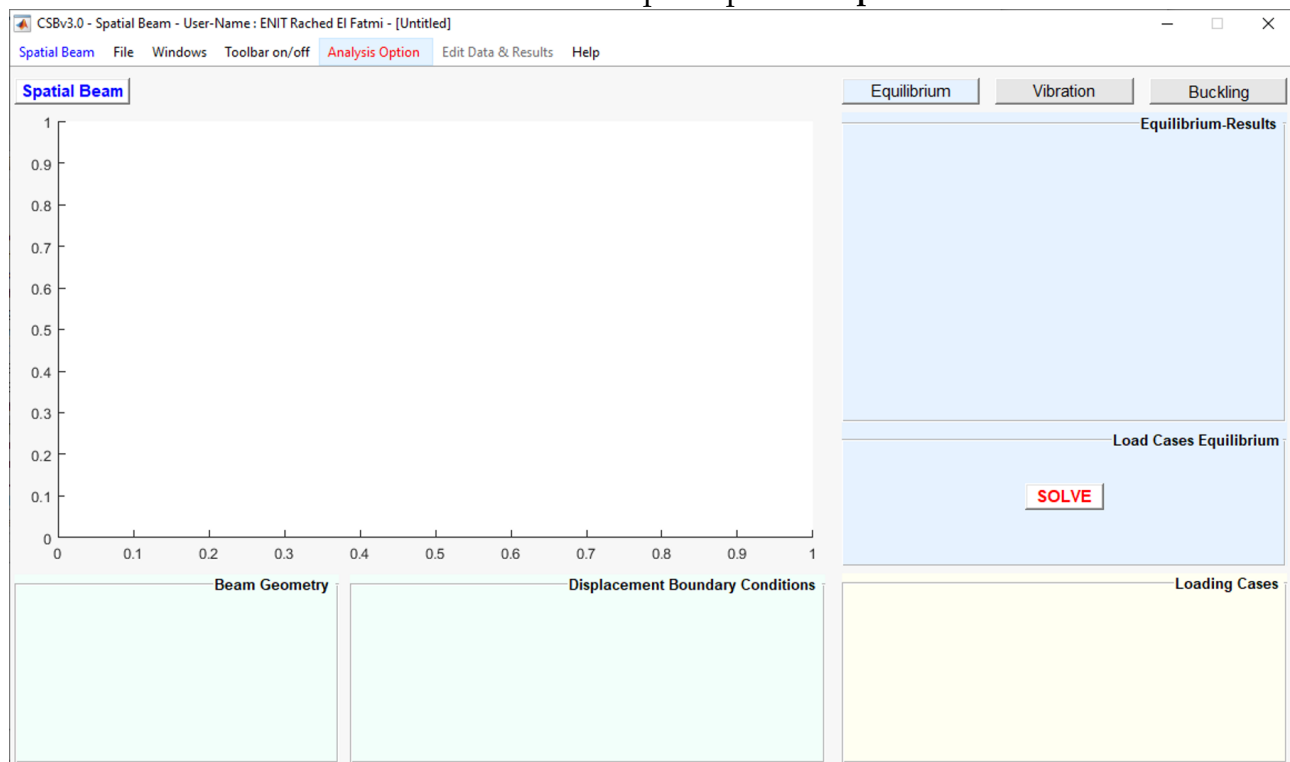
Beam Geometry dédié à la déclaration de la géométrie de la poutre

Displacement Boundary Conditions dédié à la déclaration des conditions d'appuis.

Load Cases dédié à la déclaration des chargements

et une zone (en haut à droite) dédiée aux analyses d'équilibre, de vibration et de flambement dont l'affichage dépend de *l'onglet* actif : Equilibrium, Vibration ou Buckling.

FIGURE 7.2.1 – La fenêtre principale de **Spatial Beam**

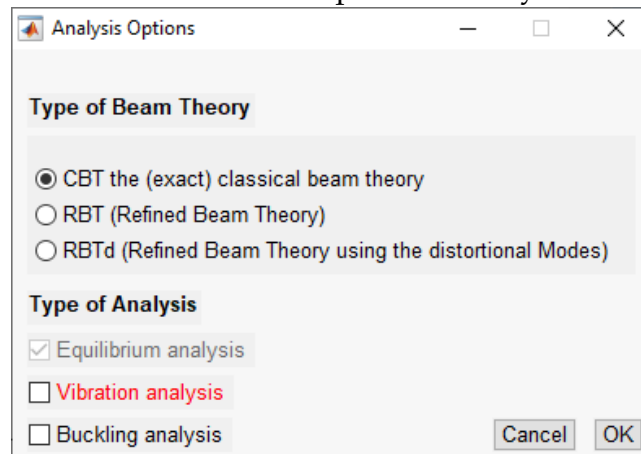


La barre des menus. La barre des menus est similaire à celle des autres modules. Ce qui est particulier à ce module est *l'insertion* (ou l'utilisation) d'une section et les *options* d'analyse :

File ▷ **Insert Section** permet d'utiliser une section préalablement calculée avec **CSection**, pour pouvoir déclarer ou générer une poutre

Analysis Options affiche une fenêtre (figure-7.2.2) permettant de choisir (voir plus loin dans le texte) la méthode de calcul et les analyses que l'on souhaite faire.

FIGURE 7.2.2 – Options d'analyse.



7.3 La déclaration de la poutre et de ses appuis

7.3.1 L'utilisation d'une section

Pour déclarer une poutre, la première étape consiste à faire appel à une section préalablement calculée avec **CSection**.

File ▷ **Insert Section** permet de charger une section en indiquant le fichier qui la contient.

Lors du chargement ou de l'insertion de la section, il s'affiche une fenêtre (figure-7.3.1) contenant toutes les informations sur la section (géométrie, matériau(x), caractéristiques, ...). Cette fenêtre indique aussi, si des distorsions (Distorsions Yes/No) ont été calculées pour la section, et si la section s'est accompagnée d'un calcul thermique (présence de l'onglet **Thermal Characteristics**).

Dès chargement de la section, il apparaît dans la fenêtre principale de **Spatial Beam** :

- un bouton **Show-Section**, au dessus de la zone graphique, qui permet à tout instant de mettre en avant la fenêtre des caractéristiques de la section.
- des tables **Axial Points** et **Nodal Coordinates** dans le cadre **Beam Geometry** dédié à la déclaration de la poutre (figure-)7.3.2.

FIGURE 7.3.1 – Les caractéristiques de la section.

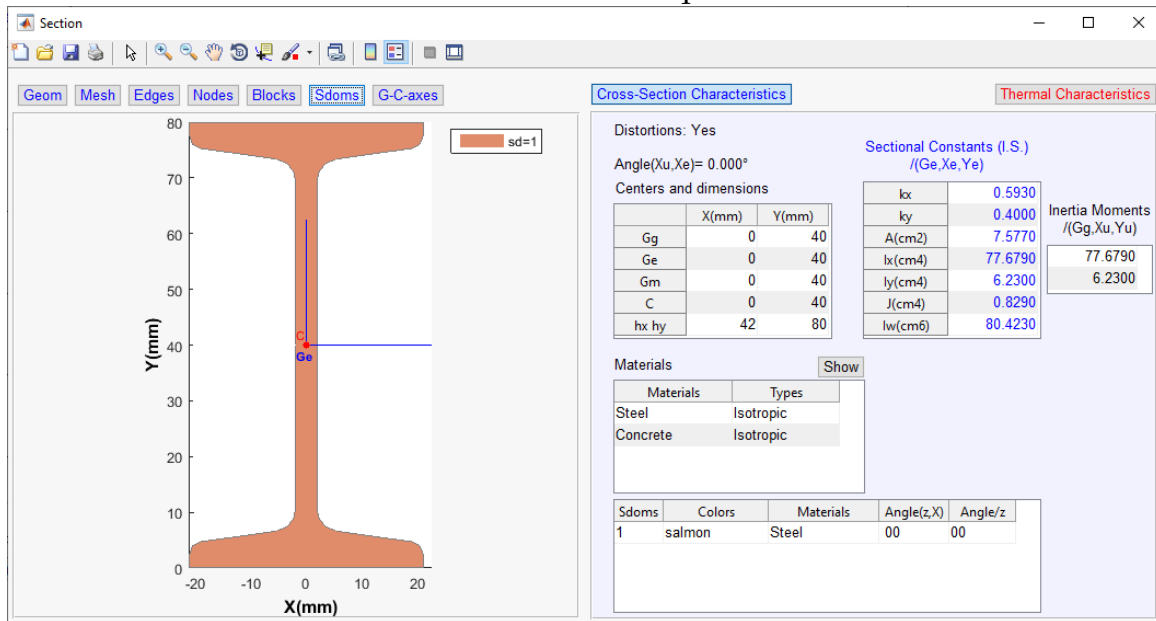
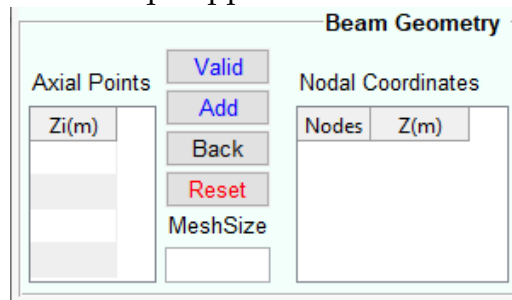


FIGURE 7.3.2 – Les tables qui apparaissent dès insertion d'une section.



7.3.2 La génération de la poutre

Une fois la section chargée, la poutre est générée par extrusion selon l'axe (z) de la poutre. Pour cela, il suffit de déclarer quelques coordonnées (abscisses) Z_i selon l'axe de la poutre, dans la table **Axial Points**. L'introduction des valeurs d'abscisse doit se faire dans l'ordre ($Z_i < Z_{i+1}$).

En dehors des deux abscisses origine et extrémité, les abscisses intermédiaires sont généralement déclarés en prévision des conditions d'appuis ou de chargement.

Plusieurs boutons accompagnent la table **Axial Points** de déclaration des abscisses :

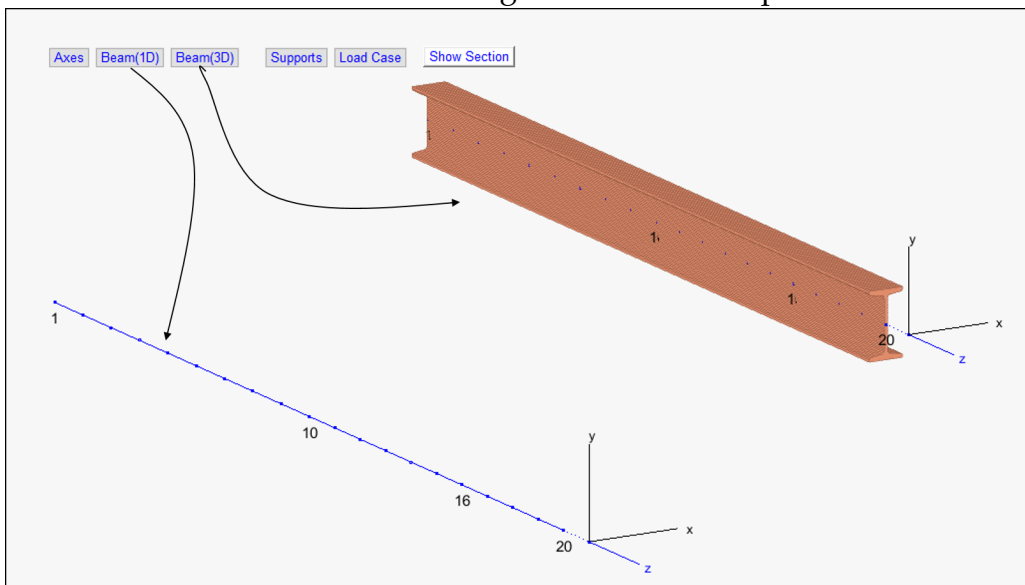
- Valid** utilise les abscisses déclarées pour générer de manière automatique
 - la géométrie de la poutre par extrusion de la section le long de l'axe de la poutre
 - le maillage par éléments finis 1D de la poutre
 - l'affichage de la poutre (figure-7.3.3) dans la zone graphique (en 1D ou 3D)
- Add** permet d'ajouter des lignes supplémentaires à la table, pour d'éventuelles nouvelles abscisses.
- Back** permet de revenir au contenu de la table avant validation.

Reset permet de vider la table

MeshSize est une case dans laquelle il est possible (mais non nécessaire) de préciser la taille d'un élément de maillage ; à défaut, le maillage est réalisé selon une valeur qui s'inscrira dans cette case. La valeur de **MeshSize** obéit à des limites qui dépendent de la taille de la section et de celle de la poutre.

Dès validation de la table des abscisses, la poutre est générée et affichée (figure-7.3.3), et il apparait dans la table Nodal Coordinates les abscisses de tous les nœuds du maillage 1D.

FIGURE 7.3.3 – Affichages 1D et 3D de la poutre.



En haut de la zone graphique, deux boutons permettent d'afficher la poutre en 1D ou 3D :

Beam(1D) pour l'affichage (1D) de la ligne moyenne de la poutre ; cet affichage fait apparaître la discrétisation en éléments finis 1D et les numéros des nœuds qui correspondent aux abscisses déclarées dans la table **Axial Points**.

Beam(3D) pour l'affichage 3D de la poutre.

7.3.3 Les appuis

FIGURE 7.3.4 – La table des conditions d'appuis.

Displacement Boundary Conditions								
Add		Reset line(s)		(mm or rad.(x 0.001))				Valid
n(z)	Ux	Uy	Uz	Rx	Ry	Rz	SD	
▼							<input type="checkbox"/>	
▼							<input type="checkbox"/>	
▼							<input type="checkbox"/>	
▼							<input type="checkbox"/>	

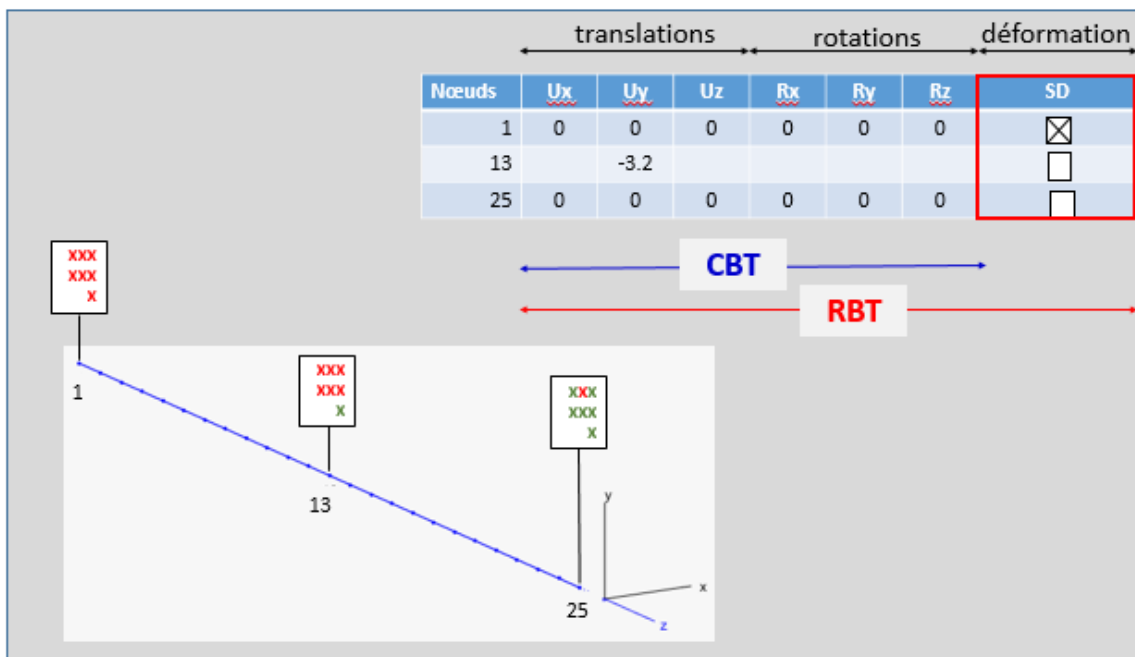
Le cadre Displacement Boundary Conditions (figure-7.3.4) contient la table de déclarations des appuis.

Il est possible de bloquer au droit d'un nœud identifié par son numéro (n(z)), les translations (U_x, U_y, U_z) et les rotations (R_x, R_y, R_z) de la section, mais aussi la déformation (SD) de la section.

Chaque degré de liberté (DDL) de translation ou de rotation peut rester libre (case vide), ou être imposé à une valeur réelle (en mm ou en mr (milli-radian)). Cependant, pour la déformation de la section, elle peut être *empêchée ou pas* selon que la case est *cochée ou pas*.

Important. Dans **Spatial Beam**, deux méthodes de résolutions (**Analyses Options**) sont proposées **CBT** (*classique*) et **RBT** (*avancée*). Pour les conditions d'appuis, la dernière colonne (SD) de la table des appuis n'est prise en considération que si la méthode de résolution choisie est **RBT**; **CBT** l'ignore (figure-7.3.5).

FIGURE 7.3.5 – Conditions d'appuis et méthodes de calculs.



Par exemple, la table de la figure-7.3.5 indique qu'au droit du nœud n°1, la section est bloquée en translation et en rotation, et que sa déformation est empêchée; ce qui correspond à un *réel* encastrement. Cependant, la section au droit du nœud n° 25, il ne s'agit que d'un encastrement *partiel*, puisque la section reste libre de déformer. Enfin, pour la section au droit du nœud n°13, le déplacement de translation selon l'axe Y a été imposé à la valeur -3.2mm, les autres DDL sont libres.

Pour la méthode de calcul **CBT**, les conditions d'appuis pour les sections aux droits des nœuds 1 et 25 sont considérés identiques, à savoir un *encastrement* au sens *classique*; mais pour la méthode de calcul **RBT**, ces deux conditions d'appuis sont différentes.

Au niveau des affichages, il n'y pas de symboles particuliers pour représenter les appuis, mais juste l'affichage d'un rectangle indiquant par des croix si les DDL sont bloqués ou libres selon que les croix sont rouges ou vertes.

Quelques boutons accompagnent la table des appuis :

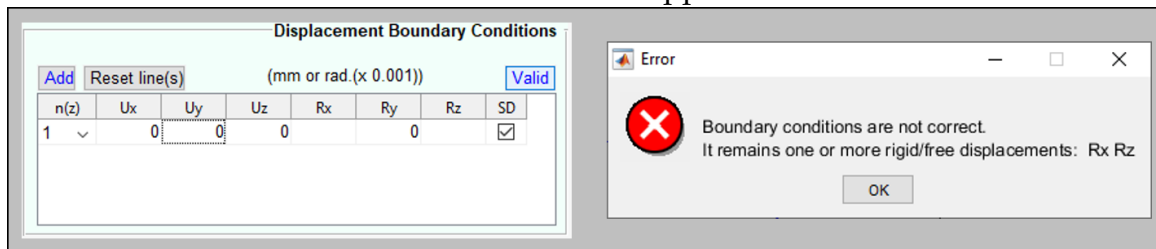
Add permet, à chaque fois qu'il est sollicité, d'ajouter 4 lignes à la table

Reset(Lines) permet de vider le contenu d'une ou plusieurs lignes sélectionnées dans la table;

Valid permet de valider les conditions d'appuis définies par la table et d'afficher les appuis au niveau graphique.

Mécanisme. Si les conditions d'appuis sont insuffisantes, et qu'un quelconque mouvement de solide rigide *reste libre*, un message d'erreur s'affiche. Par exemple, figure-7.3.6, la validation des conditions d'appuis (à gauche) a conduit au message d'erreur (à droite) indiquant que les rotations Rx et Rz de la poutre sont restés libres.

FIGURE 7.3.6 – Conditions d'appuis insuffisantes.



Une fois définies, les conditions d'appuis peuvent être affichées ou pas via le bouton **Supports** qui se trouve en haut de la zone graphique.

7.4 La déclaration des chargements

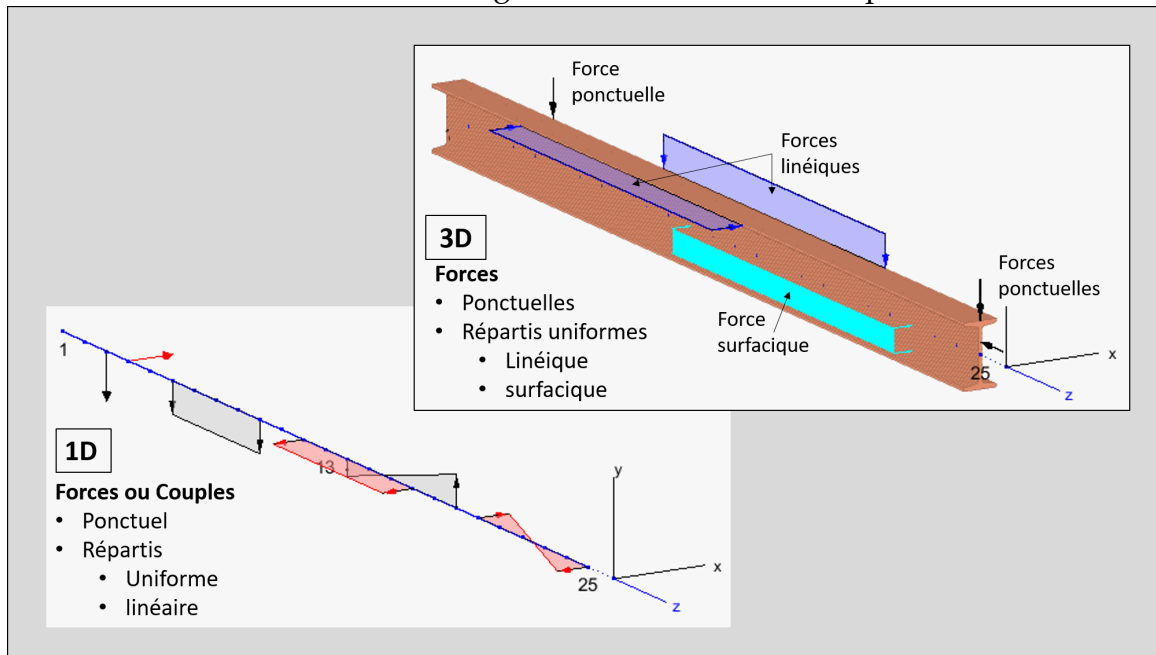
7.4.1 Les types de chargement

Dans **Spatial Beam**, il est possible d'imposer des chargements mécaniques ou des variations de température.

Les chargements mécaniques. Ils peuvent être déclarés de manière classique, sur la ligne moyenne (ou la représentation 1D de la poutre), ou bien directement sur la représentation 3D de la poutre (figure-7.4.1) :

- pour une déclaration 1D, il est possible d'imposer des forces ou des couples, concentrés ou répartis (de manière uniforme ou linéaire).
- pour une déclaration 3D, il est possible d'imposer des forces concentrées ou réparties de manière uniforme, de type linéique ou surfacique.

FIGURE 7.4.1 – Chargements 1D et 3D sur une poutre.



Les variations de température. On suppose que les conditions de température (conduction et convection) imposées sont constantes selon l'axe de la poutre, et on admet que ces conditions engendrent à l'équilibre thermique, un champ de variation de température invariant selon l'axe de la poutre; il s'ensuit que ce champ $T(x, y)$ peut être déterminé par la résolution d'un problème thermique posé sur la section.

- Pour **CBT**, le champ de température $T(x, y)$ ne fera pas l'objet d'un calcul thermique, mais il est choisi, a priori, de la forme

$$T(x, y) = T_0 + ax + by$$

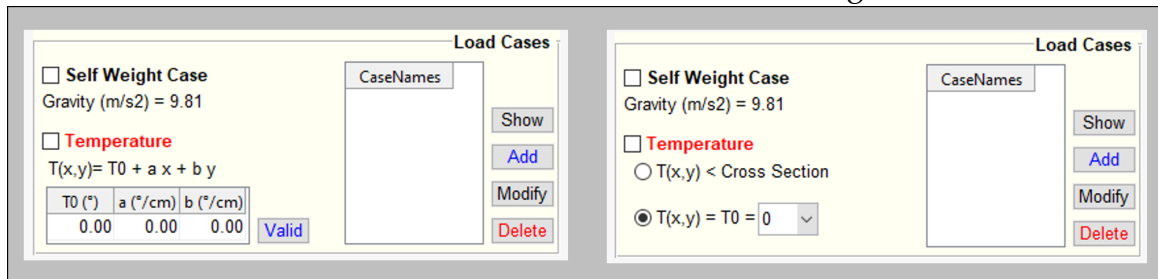
- où T_0 représente la variation globale de température,
- et a et b , les gradients de température selon, respectivement, les directions x et y de la section.
- pour **RBT**, le champ de température considéré est plus précis. Il correspond à la solution $T(x, y)$ du problème thermique posé sur la section et résolu via un *calcul thermique* (par éléments finis 2D) avec **CSection** (option calcul thermique).

7.4.2 Les déclarations de cas de charge

La déclaration des chargements ne se fait que par cas de charge dans le cadre Load Cases (figure-7.4.2). Dans ce cadre, les données de variation de température diffèrent selon que la méthode de calcul retenue est **CBT** (par défaut, à gauche) ou **RBT** (à droite).

Hormis les cas de charge prédéfinis qui concernent le *poids propre* et la *température*, un cas de charge est la donnée d'un *chargement* (1D et/ou 3D) *quelconque* sur la poutre; le nombre de cas de charge ainsi définis est illimité.

FIGURE 7.4.2 – Le cadre dédié aux cas de chargements.



Les deux cas de charges *prédéfinis* sont :

Self Weight, qu'il suffit de cocher

Temperature, qu'il faut cocher et préciser ; les données dépendent de la méthode de calcul retenue **CBT** ou **RBT** :

- Pour **CBT**, qui suppose que $T(x,y)=T_0+ax+by$, les valeurs de T_0 , a et b sont à déclarer dans une table.
- Pour **RBT**, deux boutons radio sont proposés, selon que le champ de température à considérer correspond à une variation globale *constante* (T_0) ou issu d'un *calcul* thermique de section (via **CSection**) et relatif à des conditions de température particulières :
 - $T(x,y)=T_0$, dont il faut préciser la valeur, pour un champ constant
 - $T(x,y) < Csection$, le champ thermique préalablement calculé avec **CSection** (il doit faire partie du fichier de section inséré pour générer la poutre).

La déclaration des cas de charge quelconques se fait via la table qui s'affiche à droite dans le cadre **Load Cases**, et qui est destiné à lister ceux déclarés et identifiés par leur nom. Cette table s'accompagne de quelques boutons permettant de déclarer un cas de charge, de le modifier, de le visualiser ou de l'éliminer :

Show permet de visualiser le cas de charge sélectionné (par son nom) dans la table ;

Add permet de définir un nouveau cas de charge

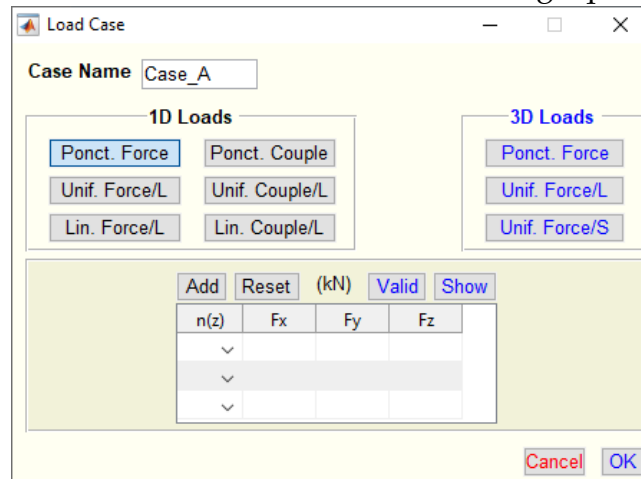
Modify permet de modifier un cas de charge sélectionné dans la table

Delete permet d'éliminer un cas de charge sélectionné dans la table

Pour la déclaration d'un nouveau cas de charge, Add affiche une fenêtre (figure-7.4.3) dans laquelle il est proposé :

- Case Name pour déclarer un nom identifiant le cas de charge
- 1D Loads un cadre dédié aux chargements sur la ligne moyenne de la poutre, et qui propose 6 boutons :

FIGURE 7.4.3 – Déclaration d'un cas de charge quelconque.



- Ponct. Force pour la déclaration d'une force appliquée sur un nœud $n(z)$;
 - Unif. Force/L pour la déclaration d'une force répartie uniforme, entre deux nœuds $n1(z)$ et $n2(z)$;
 - Lin. Force/L pour la déclaration d'une force répartie linéaire, entre deux nœuds $n1(z)$ et $n2(z)$;
 - Ponct. Couple pour la déclaration d'un couple sur un nœud $n(z)$;
 - Unif. Couple/L pour la déclaration d'un couple répartie uniforme, entre deux nœuds $n1(z)$ et $n2(z)$;
 - Lin. Couple/L pour la déclaration d'un couple répartie linéaire, entre deux nœuds $n1(z)$ et $n2(z)$;
- **3D Loads** un cadre dédié aux chargements appliqués sur la représentation 3D de la poutre, et qui propose 3 boutons :
- **Ponct. Force** pour la déclaration d'une force appliquée sur un nœud $n(S)$ de la section qui se trouve au droit d'un nœud $n(z)$;
 - **Unif. Force/L** pour la déclaration d'une force linéique uniforme entre les deux nœuds (de numéros identiques) $n(S)$ des deux sections qui se trouvent aux droits des deux nœuds $n1(z)$ et $n2(z)$;
 - **Surf. Force** pour la déclaration d'une force surfacique appliquée sur le domaine délimité par les deux bords (de numéros identiques) $edge(S)$ des deux sections qui se trouvent aux droits des deux nœuds $n1(z)$ et $n2(z)$;
- Un cadre (en bas de la fenêtre) contenant une table (contextuelle) dont l'aspect change selon le bouton sollicité ; la figure-7.4.2 montre les tables associées aux boutons Lin. Force/L et Surf. Force.
- Quelque soit le bouton sollicité, la table affichée s'accompagne des mêmes boutons :
- Add permet de rajouter des lignes supplémentaires à la table (vide au départ)
 - Reset permet de vider une ou plusieurs lignes sélectionnées dans la table
 - Valid permet de visualiser graphiquement le chargement, pour vérifier qu'il correspond bien à ce que l'on souhaite
 - Show permet d'afficher ou pas le chargement
- **OK** permet de valider et d'enregistrer le cas de charge
- **Cancel** permet d'annuler la déclaration du cas de charge

Exemples (1D et 3D) de tables de déclaration de chargement.

Lin. Force/L

(kN/m)

n1(z)	F1x	F1y	F1z	n2(z)	F2x	F2y	F2z
4	0	-1	0	15	0	1	0

Cancel OK

Surf. Force/L

(kN/m2)

n1(z)	n2(z)	edge(S)	Fx	Fy	Fz	I/O
1	20	5	1.2000	0	0	<input type="checkbox"/>
						<input type="checkbox"/>
						<input type="checkbox"/>

Cancel OK

7.5 Options de calcul

Analysis Options de la barre des menus affiche une fenêtre (figure-7.2.2) permettant de choisir la méthode de calcul et les analyses que l'on souhaite faire. Ce choix peut être fait dès qu'une section est insérée.

La fenêtre affichée permet de sélectionner la *méthode de calcul* que l'on souhaite utiliser

CBT correspond à un calcul conforme à la théorie *classique* des poutres présentée dans l'Annexe-A

RBT correspond à un calcul conforme à la théorie non classique des poutres présentée dans l'Annexe-B, mais sans prise en compte des *modes de distorsion* de la section

RBTd correspond à un calcul conforme à **RBT** avec prise en compte des *modes de distorsion*; cela suppose que pour la section utilisée, des calculs de distorsions ont été effectués dans **CSection**.

et les *types analyse* que l'on souhaite faire :

- Equilibrium** sélectionné par défaut
- Vibration** pour des calculs de vibration
- Buckling** pour des calculs de flambement

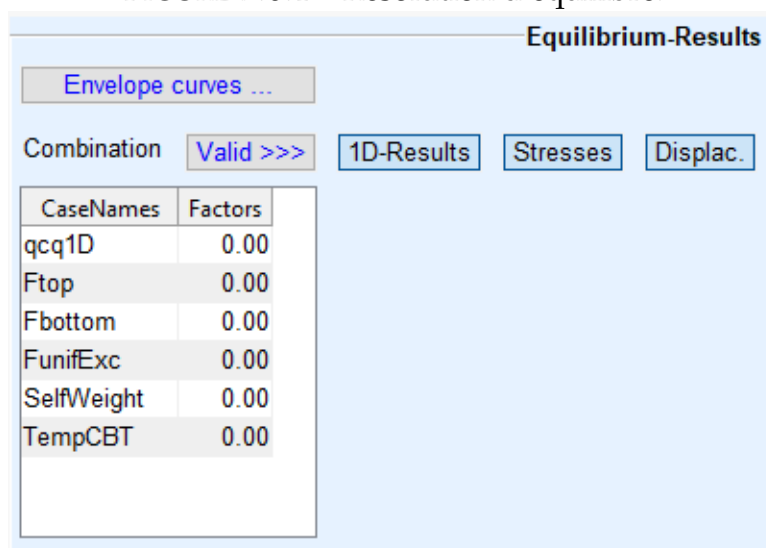
Important. Si la méthode de résolution est celle *classique* (**CBT**), le chargement 3D sera rapporté sur la ligne moyenne. Par contre, s'il s'agit de la méthode de calcul *avancée* (**RBT**), le chargement 3D est traité tel quel, compte tenu de sa position 3D réelle.

Dans ce qui suit, c'est la méthode *classique* (ou par défaut) qui est utilisée pour présenter les calculs d'équilibre de vibration et de flambement de la poutre.

Pour la méthode *avancée* (**RBT**), rien ne change sauf que pour les appuis le blocage (SD) de la déformation devient opérationnel et que les données de température peuvent différer; quant aux résultats, il apparaîtront peu ou assez différents selon l'importance des effets :

- des conditions d'appuis,
- de la localisation précise du chargement,
- ou de la distribution précise du champ de température le cas échéant.

FIGURE 7.6.1 – Résolution d'équilibre.



7.6 Calculs d'équilibre

Une fois la poutre, les appuis, les chargements et les options d'analyse fixés, un calcul d'équilibre peut être exécuté.

Dans la zone d'analyse, sous l'onglet Equilibrium, le cadre est séparé en deux : en bas figure le bouton **Solve** et la partie supérieure est réservée à l'affichage des résultats du calcul d'équilibre dès sa résolution.

Le bouton **Solve** lance la résolution de l'équilibre pour tous les cas de charge qui ont été déclarés.

La résolution conduit à l'affichage dans le cadre Equilibrium Results, de quelques boutons et en particulier d'une table dans laquelle figure une combinaison (nulle) de cas de charges (figure 7.6.1). Cet affichage signifie que la résolution a bien eu lieu et qu'elle l'a été pour tous les cas de charge listés dans la table de combinaison et identifiés par leur nom.

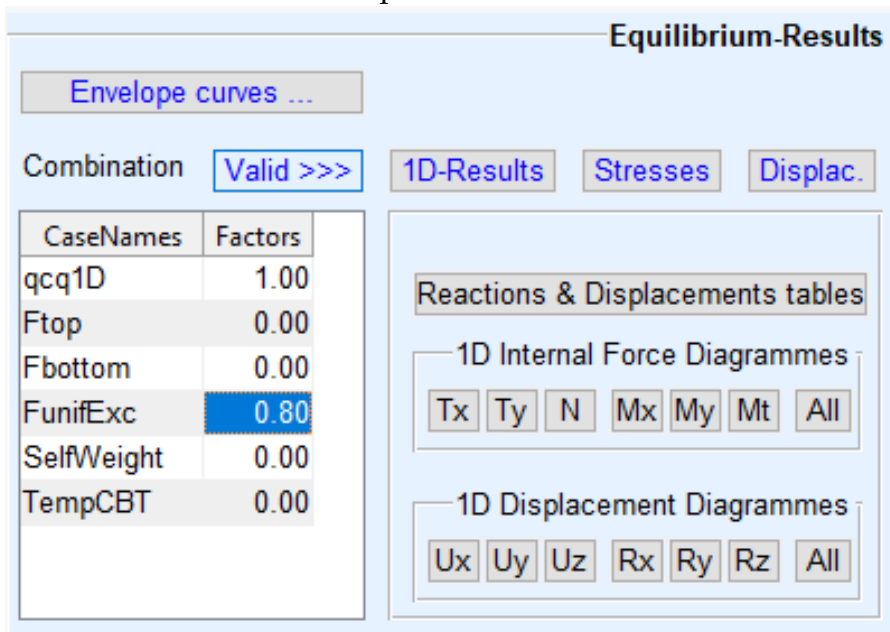
7.6.1 Les résultats

Dans **Spatial Beam**, l'affichage ou l'exploitation des résultats de calcul ne se fait que par *combinaison de cas de charge*.

Pour voir des résultats, l'utilisateur doit donc déclarer *une combinaison de cas de charge* par l'introduction des *facteurs* qui lui sont associée dans la colonne **Factors** de la table de combinaison (pour voir les résultats d'un cas de charge particulier, il suffit de lui associer le facteur 1, et de garder les autres nuls).

Pour une combinaison de cas de charge, **Valid>>>** génère l'affichage (figure-7.6.2) d'un ensemble d'onglets permettant d'accéder aux différents résultats qui correspondent à la combinaison choisie.

FIGURE 7.6.2 – Les résultats correspondant à une combinaison de cas de charge.



Sous l'onglet **1D-Results** (figure-7.6.2) :

- Reactions & Nodal Displacements** affiche dans une fenêtre les réactions aux appuis et les déplacements des nœuds de la poutre ;
- Tx,Ty,N,Mx,My,Mt,All** affiche une fenêtre donnant les diagrammes des efforts intérieurs, ou le diagramme de l'un des efforts intérieurs (figure-7.6.3) ;
- Ux,Uy,Uz,Rx,Ry,Rz,All** affiche une fenêtre donnant les diagrammes des déplacements (translations et rotations), ou un diagramme de déplacement (figure-7.6.4) ;

FIGURE 7.6.3 – Diagrammes des efforts intérieurs.

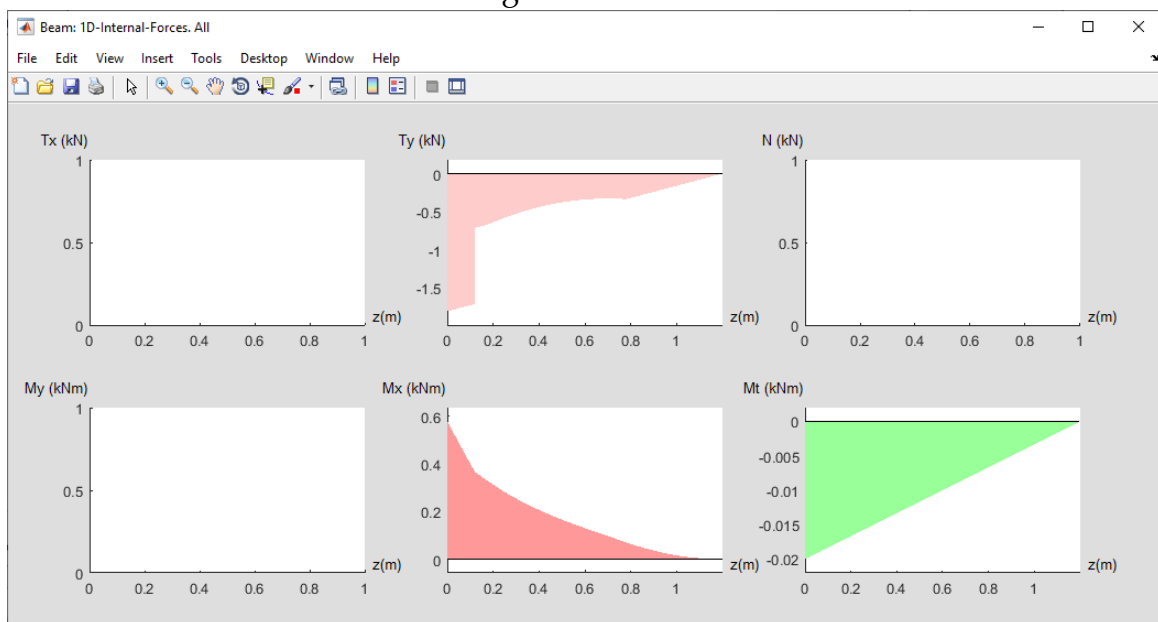


FIGURE 7.6.4 – Mouvements de la ligne moyenne.

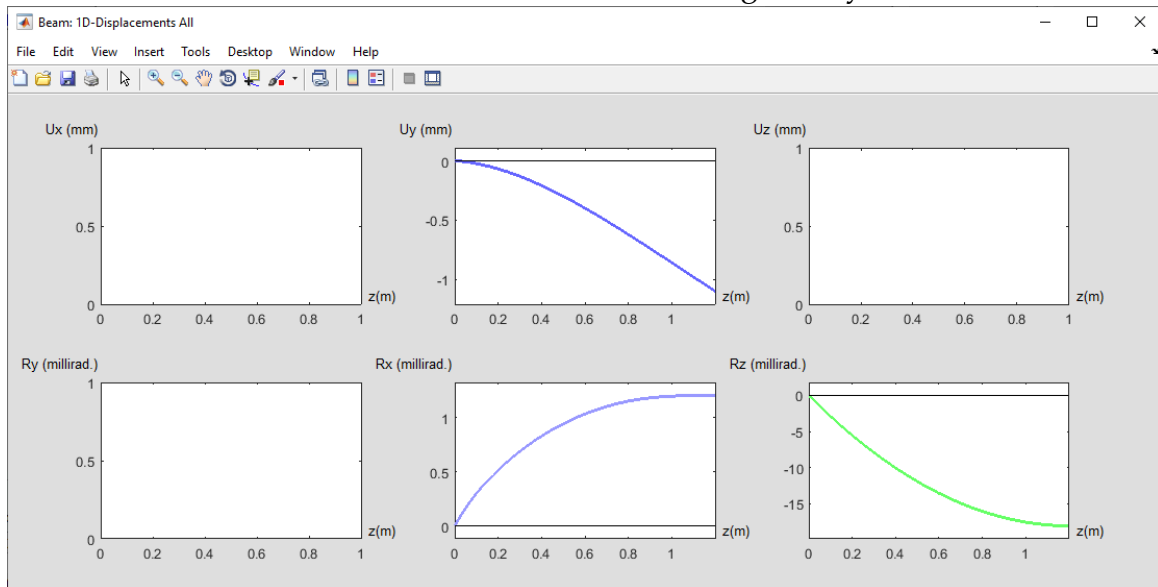
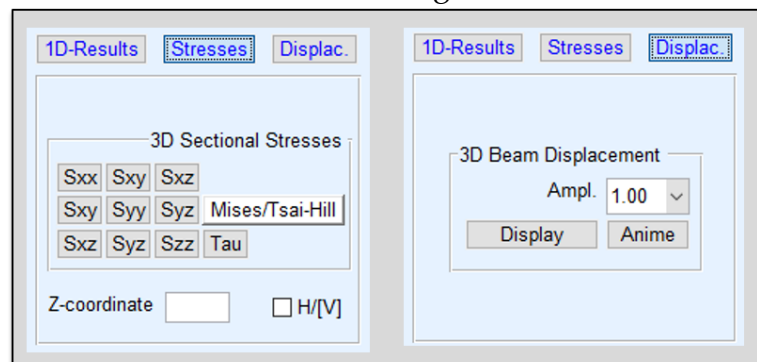


FIGURE 7.6.5 – Onglet Stresses.



Sous l'onglet **Stresses** (figure-7.6.5) :

Sxx, Sxy, Sxz,... affiche dans une fenêtre (figure-7.6.6, gauche), pour la composante choisie, le champ de contrainte au droit de la section dont l'abscisse est précisée (par l'utilisateur) dans la case **Z-Coordinate** ; dans cette fenêtre, à droite de la zone graphique, on trouvera les valeurs extrêmes des contraintes et une table donnant les valeurs des 6 efforts intérieurs au droit de la section.

H/[V] permet d'obtenir une représentation horizontale ou verticale (par défaut) du champ de contrainte.

Sous l'onglet **Displac.** (figure-7.6.5, droite)

Display affiche dans une fenêtre la déformée 3D selon un facteur amplification (ampl.) . Dans cette fenêtre, un bouton **Show-DDL(z) on/off** permet d'afficher ou pas dans une fenêtre (figure-7.6.8) et dans un même système d'axes, les variations des différents degrés de liberté (DDL) qui gouvernent le mouvement de la poutre.

Anime permet d'animer la déformée obtenue selon un coefficient d'amplification ampl.

FIGURE 7.6.6 – Champ de contrainte (S_{zz}) au droit d'une section.

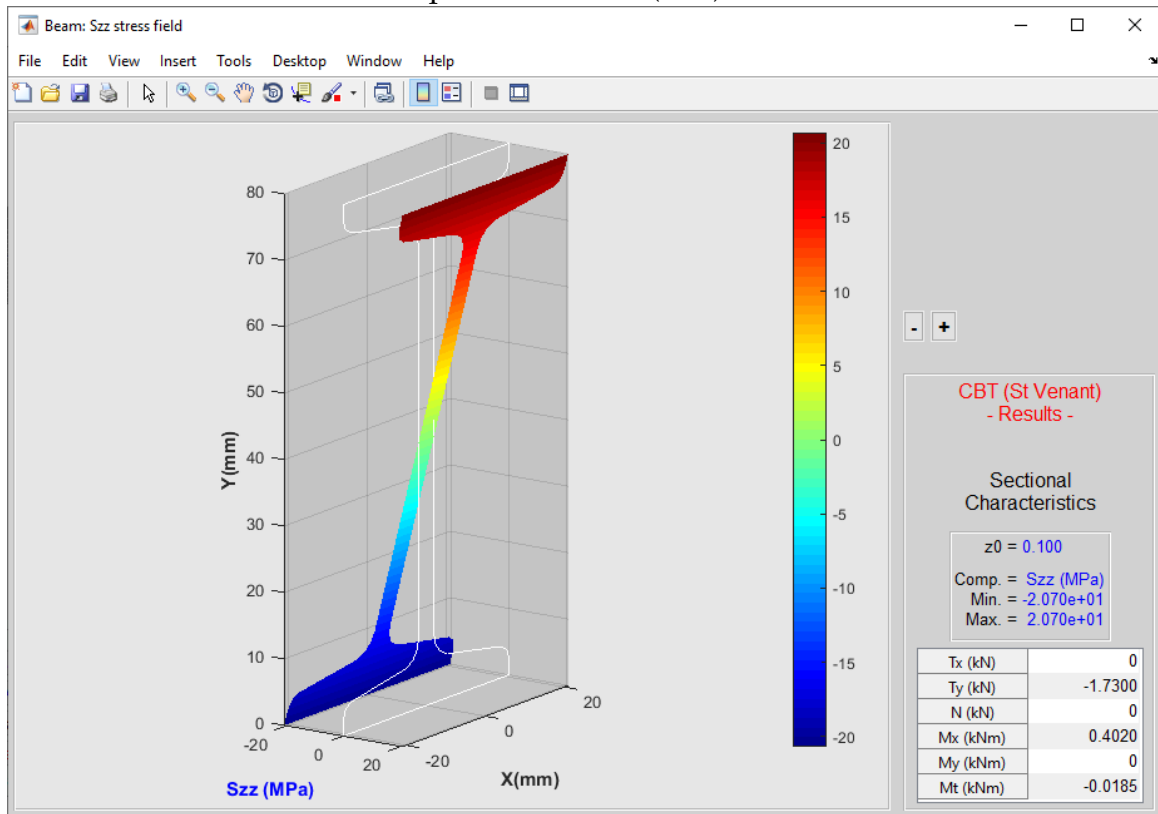


FIGURE 7.6.7 – Déformée 3D à l'équilibre.

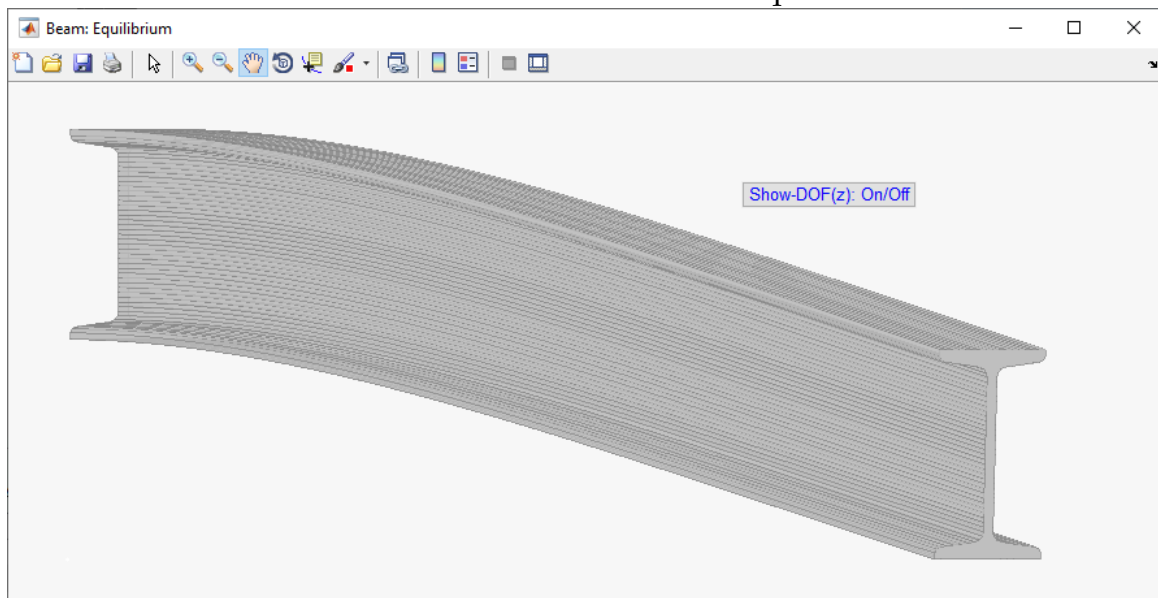


FIGURE 7.6.8 – Variations des différents degrés de liberté de mouvement de la section.

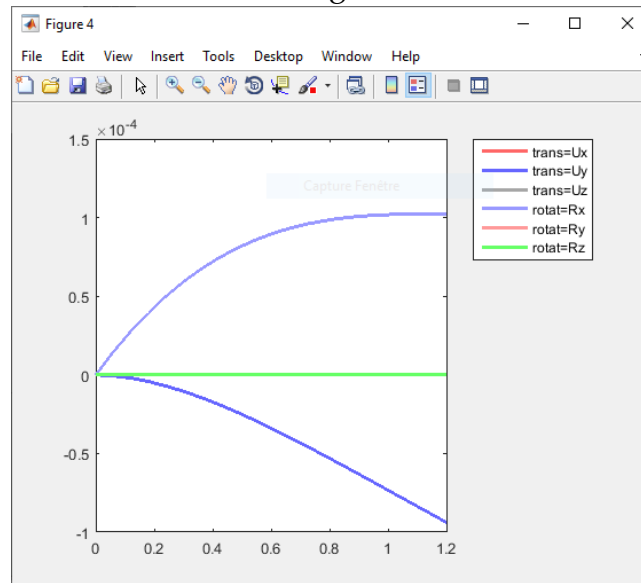
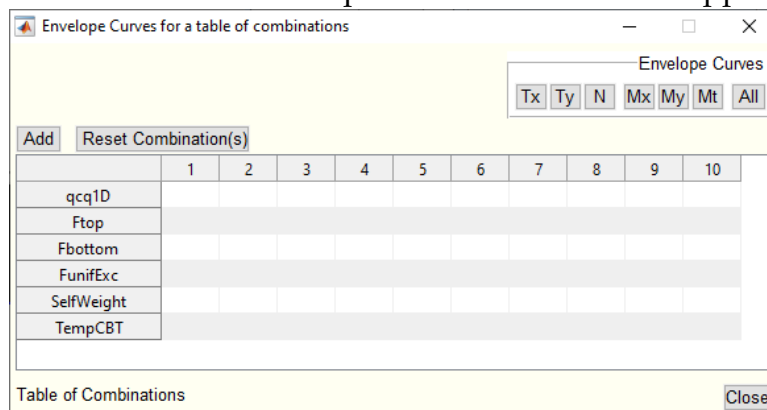


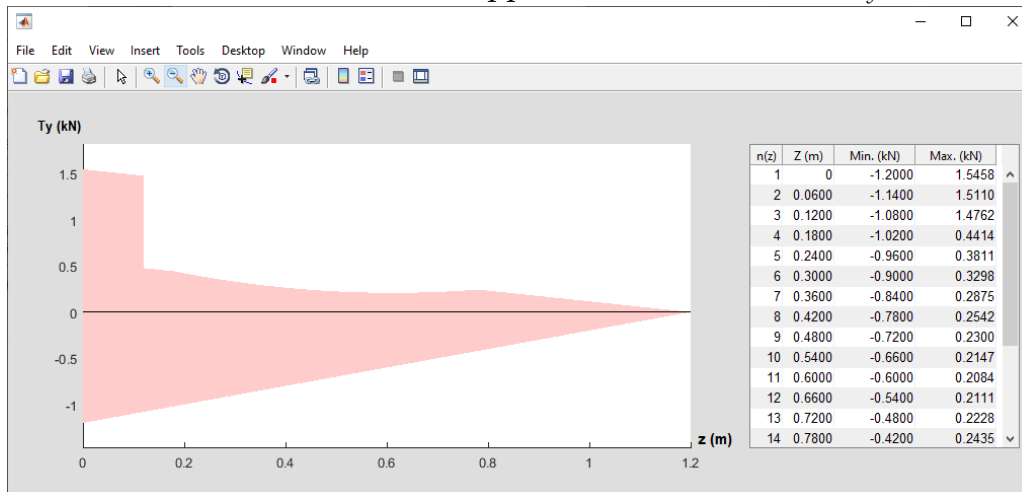
FIGURE 7.6.9 – Fenêtre pour l'obtention d'enveloppes.



Calculs d'enveloppes. Le bouton [Envelope Curves...](#) (figure-7.6.2, haut) permet d'obtenir pour chaque poutre, l'enveloppe d'un effort intérieur (ou les enveloppes de tous les efforts intérieurs) correspondant à n combinaisons de charge choisies par l'utilisateur. Ce bouton conduit à l'affichage d'une fenêtre (figure-7.6.9) dédiée aux calculs d'enveloppes. Deux étapes sont nécessaires pour obtenir, pour la poutre, le ou les enveloppes souhaitées :

1. Définir les n combinaisons (10 colonnes sont proposées par défaut, mais [Add](#) permet d'ajouter, à chaque fois qu'il est sollicité, 4 nouvelles colonnes pour des combinaisons supplémentaires) puis valider ([Valid](#)) les n combinaisons déclarées. [Reset Combination\(s\)](#) permet d'annuler une ou plusieurs combinaisons
2. Choisir l'effort intérieur pour lequel l'enveloppe doit être affichée. La figure-7.6.10 montre une enveloppe d'effort tranchant obtenue pour le choix de certaines combinaisons.

FIGURE 7.6.10 – Enveloppe de l'effort tranchant (T_y)



7.7 Calculs de vibrations

Les calculs de vibration de la poutre fournissent :

- les premiers modes de vibration naturelle et leur fréquence ;
- ou les premiers modes de vibration autour d'un état chargé et leur fréquence.

Pour peu que l'option Vibration ait été sélectionnée via **Analyses Options** de la barre des menus, il apparaît (figure-7.7.1) sous l'onglet Vibration de la zone d'analyse deux cadres :

Vibration Data dédié à la déclaration des données d'un calcul de vibration

Vibration Results dédié à l'affichage des résultats dès que les calculs de vibration sont effectués.

7.7.1 Les données

Les données, dans le cadre Vibration Data, sont :

N-Modes le nombre de modes souhaités (1 à 10)

Free le bouton radio qu'il faut sélectionner pour un calcul de vibrations libres (ou naturelles)

Under loading le bouton radio qu'il faut sélectionner pour un calcul de vibrations autour d'un état chargé défini par une combinaison (validée) de cas de charge.

Solve permet, une fois les données précisées, de lancer le calcul de vibration.

7.7.2 Les résultats

Dés résolution, il apparaît dans le cadre supérieur (figure-7.7.1) une table contenant les valeurs (en Hz) des premières fréquences; et il est possible d'afficher et d'animer le mode de vibration de la poutre correspondant à une fréquence sélectionnée dans la table des fréquences. La figure-7.7.2 montre la déformée 3D de la poutre correspondant au deuxième mode de vibration et dont la fréquence est de 36.064 Hz.

FIGURE 7.7.1 – Résultats d'un calcul de vibration.

The screenshot shows a software interface with three tabs: "Equilibrium", "Vibration" (selected), and "Buckling". The "Vibration Results" section contains a table of modes and frequencies, and a "3D Vibration Mode" control panel. The "Vibration Data" section includes radio buttons for "Under Loading" and "Free" (selected), a "SOLVE" button, a table of case names and factors, an "N-Modes" dropdown set to 2, and a "Valid" button.

Modes	Freq.(Hz)
1	10.2800
2	36.0640

3D Vibration Mode
Ampl. 4.00
Display Anime

Under Loading Free

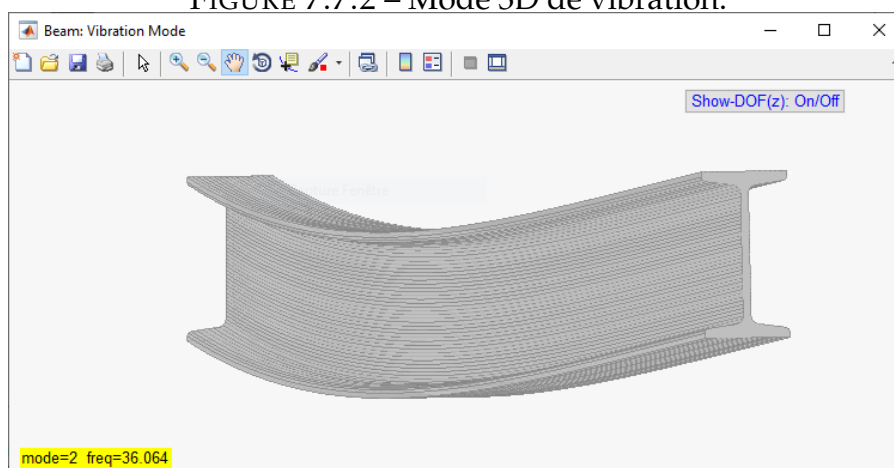
CaseNames	Factors
Ftop	0.00
SelfWeight	0.00
TempCBT	0.00

SOLVE

N-Modes
2

Combination Valid

FIGURE 7.7.2 – Mode 3D de vibration.



7.8 Calculs de flambement

Les calculs de flambement de la poutre fournissent :

- les premiers modes de flambement et leur charge critique pour l’amplification d’un chargement à partir de l’état naturel;
- les premiers mode de flambement et leur charge critique pour l’amplification d’un chargement, à partir d’un état préchargé.

Pour peu que l’option **Buckling** ait été sélectionnée via **Analyses Options** de la barre des menus, il apparaît (figure-7.8.1) sous l’onglet **Buckling** de la zone d’analyse deux cadres :

Buckling Data dédiée aux données du calcul de flambement de la poutre

Buckling Results dédié à l’affichage des résultats dès que les calculs de flambement sont effectués.

7.8.1 Les données

Les données, dans le cadre **Buckling Data**, sont :

N-Modes le nombre de modes souhaités (1 à 10)

Amplified Loading le chargement qu’il faut amplifier; ce chargement étant défini par une combinaison (validée) de cas de charge.

Permanent loading qu’il faut cocher pour un calcul de flambement correspondant à l’amplification du chargement (**Amplified Loading**) à partir d’un état préchargé (stable); ce préchargement étant aussi défini par une combinaison validée de cas de charge.

Solve permet, une fois les données précisées, de lancer le calcul de flambement.

FIGURE 7.8.1 – Zone d'analyse du flambement.

Buckling Results

Buckling Data

Permanent Loading

CaseNames	Factors
Ftop	0.00
SelfWeight	0.00
TempCBT	0.00

Combination Valid

Amplified Loading

CaseNames	Factors
Ftop	0.00
SelfWeight	0.00
TempCBT	0.00

Combination Valid

SOLVE

N-Modes
1

7.8.2 Les résultats

Dès résolution, il apparaît (figure-7.8.2) dans le cadre **Buckling Results**, une table contenant les valeurs critiques de l'amplification du chargement. et il est possible d'afficher pour chaque valeur critique la déformée 3D de la poutre correspondant au mode de flambement qui lui est associé.

En l'occurrence dans la (figure-7.8.2), il s'agit du calcul du premier mode de flambement de la poutre pour l'amplification du chargement dénommé **Ftop** et correspondant à une force concentrée appliquée à l'extrémité libre de la poutre et placée sur la semelle supérieure (la combinaison étant ici réduite à la contribution du seul cas de charge (**Ftop**) avec un facteur 1). Le résultat de calcul a conduit à une valeur critique 4.636; le mode 3D de flambement de la poutre correspondant à la première valeur critique est affichée figure-7.8.3; ce mode, comme attendu pour une poutre en flexion, correspond au déversement latéral de la poutre.

FIGURE 7.8.2 – Résultats de calcul de flambement.

Equilibrium Vibration **Buckling**

Buckling Results

Modes	Crit. ampl.
1	4.6360

3D Buckling Mode
 Ampl. 2.00
 Display Anime

Buckling Data

Permanent Loading Amplified Loading

CaseNames	Factors
Ftop	0.00
SelfWeight	0.00
TempCBT	0.00

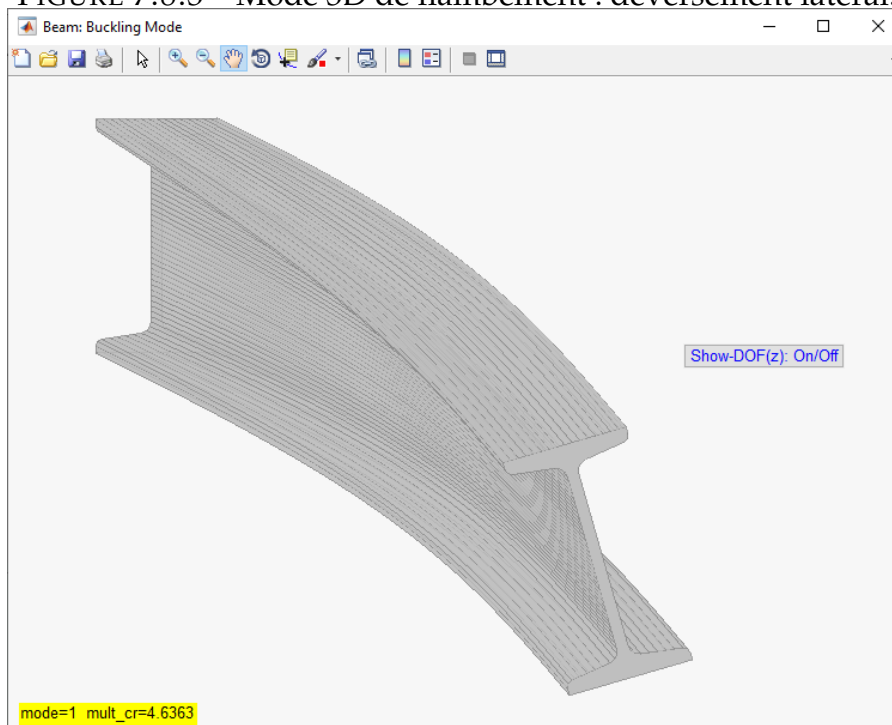
CaseNames	Factors
Ftop	1.00
SelfWeight	0.00
TempCBT	0.00

SOLVE

N-Modes
1

Combination Valid Combination Valid

FIGURE 7.8.3 – Mode 3D de flambement : déversement latéral.



Chapitre 8

Le module Spatial Structure

Sommaire

8.1	Introduction	122
8.2	L'utilisation de Spatial Structure	124
8.3	La déclaration de la structure et des appuis	124
8.3.1	Les points	124
8.3.2	Les sections ... et la méthode de calcul	125
8.3.3	Les poutres	126
8.3.4	Les appuis	128
8.4	La déclaration des chargements	129
8.5	Calculs d'équilibre et résultats	130
8.5.1	La résolution	130
8.5.2	Les résultats	131
8.6	Calculs de vibrations et résultats	132
8.7	Calcul de flambement et résultats	133
8.8	Calcul de longueurs de flambement	135

8.1 Introduction

Spatial Structure assure le calcul par éléments finis (1D) de structures dans l'espace constituées d'un assemblage de poutres droites de section quelconque homogène ou hétérogène. Ce module propose des analyses *d'équilibre, de vibration et de flambement*; une *originalité* de **Spatial Structure** est de proposer le calcul systématique des deux *longueurs de flambement* d'un élément quelconque de la structure.

Par ailleurs, quelque soit le type d'analyse effectué, deux méthodes de calcul sont proposées :

- selon la méthode *classique*, désignée par **CBT** (Classical Beam Theory), et conformément à la présentation qui en est faite dans l'Annexe-A;
- selon une méthode *avancée*, désignée par **RBT** (Refined Beam Theory) qui va au-delà de la méthode *classique* pour rendre compte des conditions d'extrémités (telle que par exemple un gauchissement gêné au droit d'un encastrement), et conformément à la présentation qui en est faite dans l'Annexe-B.

Important. La méthode de calcul choisie (**CBT** ou **RBT**) ne s'applique pas nécessairement au calcul de toutes les poutres de la structure. Dans **Spatial Structure**, le choix se fait par type de section : si pour la section de type-1 la méthode de calcul choisie est **CBT**, et que pour la section de type-2 la méthode choisie est **RBT**, cela impliquera que toutes les poutres de la structure dont la section est de type-1 seront traitées par **CBT** et que toutes celles dont la section est de type-2 seront traitées par **RBT**.

Ainsi dans ce module, le choix de la méthode de calcul se fait dans la *table des sections* (figure-8.3.1), une colonne ([CBT]/RBT) est prévue à cet effet; par défaut, c'est la méthode **CBT** qui est appliquée.

D'un point de vue mécanique, une structure ici est définie par un assemblage de poutres droites (d'axe local z) de section constante homogène ou hétérogène (d'axes x et y); les sections sont supposées préalablement calculées avec le module **CSection** de **CSB**. Les conditions de liaison des poutres aux nœuds d'assemblages sont complètes (par défaut) ou bien relaxées en rotations par rapport aux axes (locaux x et y) de la section. Les conditions d'appuis sont quelconques : chaque degré de liberté (de translation ou de rotation) peut être bloqués, imposés à une valeur réelle, ou encore associé à une rigidité élastique.

Remarque : si la méthode de calcul est **RBT**, la déformation de la section est empêchée aux extrémités de la poutre.

Les chargements mécaniques sont quelconques, mais déclarées sur la ligne moyenne de la poutre. La prise en compte du poids propre est automatique et il est possible d'imposer une variation de température globale pour la structure.

Les chargements sont déclarés par cas de charge, et deux cas de charge sont proposés par défaut : le poids propre et la variation globale de température.

Avant tout calcul, **Spatial Structure** vérifie que la structure ne comporte pas de *mécanisme* (local ou global). Si un ou plusieurs mécanismes sont détectés, l'utilisateur est averti et il

lui est possible de visualiser (animation) le ou les mécanismes afin qu'il puisse corriger la structure.

Equilibre de la structure. Pour l'analyse de l'équilibre, tous les cas de charge déclarés sont systématiquement calculés. L'exploitation des résultats s'effectue par *combinaison* de cas de charges. Pour une combinaison de cas de charges définie par l'utilisateur, les résultats fournis sont :

- pour la structure : la déformée de la structure et son animation
- pour chaque poutre :
 - les diagrammes des 6 efforts intérieurs ($T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_t$)
 - la valeur et le lieu de la *flèche* (déplacement transversal) maximale.
 - le champ de contrainte au droit d'une abscisse quelconque de la poutre ; ce champ de contrainte proposé pour chacune des 6 composantes du tenseur contrainte est affiché par matériau si la section est hétérogène.
- pour chaque nœud (d'assemblage) de la structure :
 - son mouvement de translation et de rotation
 - les actions qui lui sont appliquées par les différentes poutres qui lui sont reliées
- pour les appuis : les réactions.

De plus, pour n combinaisons de cas de charges définies par l'utilisateur, **Spatial Structure** fournit, pour chaque poutre, les *enveloppes* des 6 efforts intérieurs .

Vibration de la structure. Les calculs de vibration de la structure fournissent :

- les premiers ¹ modes de vibration naturelle et leur fréquence ;
- ou les premiers modes de vibration autour d'un état chargé et et leur fréquences.

Flambement de la structure. Les calculs de flambement de la structure fournissent :

- les premiers mode de flambement et leur charge critique pour l'amplification d'un chargement à partir de l'état naturel ;
- les premiers mode de flambement et leur charge critique pour l'amplification d'un chargement à partir d'un état préchargé.

Longueurs de flambement de poutre. Pour tout élément de la structure, les deux longueurs de flambement sont fournies :

- sans prise en compte d'un chargement sur la structure.
- ou avec prise en compte d'un chargement sur la structure

1. le nombre de modes est ≤ 10 .

8.2 L'utilisation de Spatial Structure

L'utilisation de ce module est similaire à celle du module **Plane Structure** sauf que :

- la structure est dans *l'espace*
- les sections des poutres peuvent être *hétérogènes*
- les calculs peuvent être menés selon *deux méthodes* : **CBT** ou **RBT**

C'est pourquoi seuls les points qui sont particuliers à ce module 3D sont présentés. La lecture de ce chapitre suppose que la pratique du module **Plane Structure** est acquise et que l'essentiel des méthodes de calculs **CBT** et **RBT** est compris ; à ce propos, c'est en particulier la pratique du module **Spatial Beam** qui permettra de bien saisir l'intérêt d'un calcul *avancé* via **RBT**.

L'interface de ce module est identique à celle du module **Plane Structure** avec :

- une zone graphique à droite,
- un cadre en bas à gauche pour la déclaration des cas de charge,
- un cadre en haut à gauche dédié
 - soit à la déclaration de la structure et des appuis,
 - soit aux analyses (d'équilibre de vibration ou de flambement)selon que **Structure & Supports** ou bien **Analyses** est sollicité dans la barre des menus.

8.3 La déclaration de la structure et des appuis

La géométrie d'une structure est définie par des points (qui représentent la position des nœuds d'assemblage) et des lignes droites (qui représentent les poutres droites). La déclaration d'une géométrie peut se faire manuellement via l'interface de **Spatial Structure**, mais il est possible d'importer une géométrie de structure conçue via un logiciel extérieur :

- au format **.inp** pour une géométrie réalisée avec le générateur de dessins et de maillages **Gmsh** ;
- au format **.dxf** pour une géométrie réalisée avec un logiciel de DAO (**Qcad, Autocad,...**).

Une géométrie importée peut, par la suite, être modifiée ou complétée au sein de **Spatial Structure**. Quant au choix des sections pour les poutres ou encore l'affectation des appuis pour la structure, ils se font dans **Spatial Structure**.

8.3.1 Les points

Ils sont déclarés par leur 3 coordonnées (en m) ; pas directement dans table des points, mais via une fenêtre que génère le bouton **Add** associé à la table ; à chaque sollicitation, ce bouton propose la déclaration de 1 à 10 points supplémentaires.

Dès validation, les points s'affichent dans la zone graphique (matérialisés par des petits carrés bleus) et sont enregistrés dans la table des points. La numérotation des points est automatique.

8.3.2 Les sections ... et la méthode de calcul

FIGURE 8.3.1 – Table des sections.

SectionNames	[CBT]/RBT
IPN_100	<input type="checkbox"/>
IPN_160	<input type="checkbox"/>
IPN_220	<input type="checkbox"/>
HEA_200	<input type="checkbox"/>

Comme dans **Plane Structure**, la table des sections (figure-8.3.1) propose par défaut une liste de sections. Cette liste, qui peut être modifiée, est celle qui sera utilisée pour affecter les sections aux poutres de la structure. Quelques boutons permettent de manipuler la liste des sections :

Show permet d'afficher (figure-8.3.2) les caractéristiques de la section sélectionnée dans la table des sections

Add(Library) permet d'ajouter une section sélectionnée dans le catalogue des sections (d'acier) normalisées. Une fenêtre s'affiche permettant de sélectionner le type de section et ses dimensions. Il est à noter que toutes les sections du catalogue ont été préalablement calculées avec **CSection**.

Add(Section) permet à l'utilisateur d'ajouter une section quelconque qui a préalablement été calculée avec **CSection**, en indiquant le fichier dans laquelle elle a été sauvegardée.

Delete permet d'éliminer une section de la table des sections.

FIGURE 8.3.2 – Caractéristiques de section.

SECTIONAL CONSTANTS	
Section Type	homo_isot
Section Name	IPN_100
Material Density rho	7800 kg/m3
Sectional Area A	10.63 cm2
Shear Coefficient Ix	0.58
Shear Coefficient ky	0.411
Young Modulus Ey	210000 MPa
Poisson's Ratio Nu	0.30
Thermal Expans. cte alpha	1.200 10 ^{^-5} °C
Inertia Moment Ix	170.284 cm4
Inertia Moment Iy	12.053 cm4
Torsional constant J	1.531 cm4

Méthode de calcul. La table des sections propose deux colonnes. La deuxième colonne [CBT]/RBT permet de fixer la méthode de calcul que l'on souhaite utiliser pour chacune des sections. Par défaut, c'est la méthode *classique* (CBT) qui est appliquée.

FIGURE 8.3.3 – La table des poutres.

Labels	PO	PE	Lengths	LO	LE	Section Names	Ang.(°)	Colors
1	1	2	4.00	---	---	IPN_100	0.00	blue
2	2	3	4.00	---	---	HEA_200	30.00	blue
3	2	4	4.12	---	---	IPN_100	0.00	blue
4	3	4	1.00	---	---	IPN_160	0.00	blue
5	5	6	4.12	---	---	IPN_100	0.00	blue
6	5	7	4.00	---	---	IPN_100	0.00	blue

8.3.3 Les poutres

Les colonnes de la table des poutres (figure-8.3.3) indiquent pour chaque poutre :

Label le numéro de la poutre

PO les numéros du point Origine

PE les numéros du point Extrémité

Length la longueur de la poutre

LO le type de liaison à l'Origine

LE le type de liaison à l'extrémité

Section le nom de la section affectée à la poutre

Ang.(°) l'orientation de la section autour de l'axe de la poutre ; la valeur nulle correspond à l'orientation par défaut de l'axe y de la section.

Color la couleur de la poutre

La déclaration des poutres ne se fait pas directement dans la table des poutres mais via le bouton **Add** qui lui associé ; celui ci propose une fenêtre pour l'ajout de 1 à 10 poutres supplémentaires et dans laquelle chaque poutre est déclarée uniquement par ses points Origine et Extrémité. Dès validation les poutres sont rajoutées dans la table des poutres, leur numérotation est automatique, et leur autres caractéristiques sont affectées par défaut :

- la longueur est calculée de manière automatique
- des liaisons complètes sont affectées aux deux liaisons LO et LE
- la section choisie est celle qui figure en tête de liste (ou celle actuellement sélectionnée) dans la table des sections
- la valeur nulle pour l'angle de rotation,
- la couleur bleue

Ces caractéristiques affectées par défaut, peuvent par la suite être modifiées via le bouton **Modify** associé à la table, et qui permet d'opérer des changements par groupes de poutres et pour une ou plusieurs caractéristiques de poutre.

Modification de caractéristiques de poutres. La sélection d'une poutre ou d'un groupe de poutres peut se faire

- avant d'actionner le bouton **Modify**, graphiquement avec la souris : un clic sur une poutre la sélectionne (elle change de couleur) un deuxième clic la désélectionne.
- après avoir actionné le bouton.

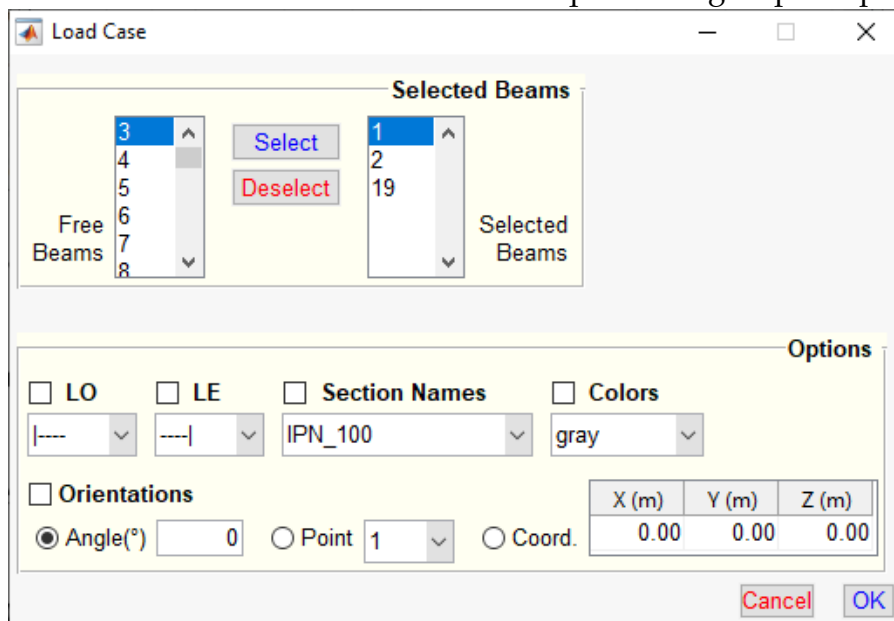
Le bouton **Modify** affiche une fenêtre (figure-8.3.4) dans laquelle est indiquée

- la liste des poutres (**Selected Beams**) qui ont été préalablement sélectionnées graphiquement
- une liste (**Free Beams**) du reste des poutres de la structure

et il est encore possible, au sein de cette fenêtre de sélectionner (**Select**) ou désélectionner (**Deselect**) des poutres.

Les modifications (**Options**) concernent 5 rubriques : les 2 liaisons aux extrémités, la section, l'orientation de la section et la couleur de la poutre. Les modifications ne se font que pour les rubriques qui ont été cochées.

FIGURE 8.3.4 – Modification des caractéristiques d'un groupe de poutres.



Les liaisons des poutres aux noeuds d'assemblage. La liaison d'une extrémité de poutre au nœud d'assemblage est de type *liaison complète* (par défaut), mais il est possible de relâcher (relâcher) cette liaison en rotations par rapport aux axes locaux (x, y) de la section de la poutre : ces liaisons sont désignées, pour la liaison à l'Origine (LO), par :

|— pour une liaison complète

Rx— pour une liaison relaxée en rotation par rapport à l'axe x de la section

Ry— pour une liaison relaxée en rotation par rapport à l'axe y de la section

Rxy– pour une liaison relaxée en rotation par rapport aux axes x et y de la section

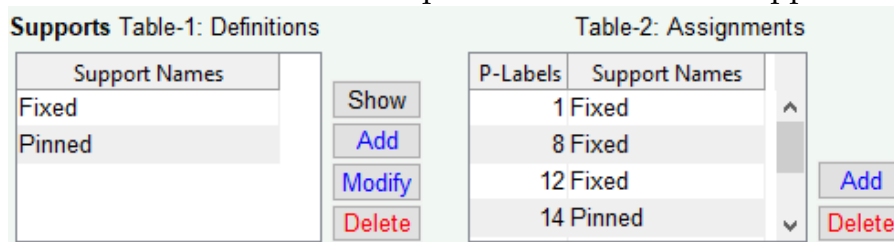
et de manière similaire pour la liaison à l'Extrémité (LE).

Orientation d'une section. L'orientation d'une section consiste à orienter l'axe y de la section; l'angle nul correspond à l'orientation par défaut de y . L'orientation par défaut peut être visualisée sur la poutre via le bouton **Sections** placé en haut de la zone graphique.

Lors des modifications des caractéristiques des poutres, 2 possibilités sont proposées pour choisir ou fixer l'orientation de la section (figure-8.3.4) :

1. choix de la valeur de l'angle d'orientation;
2. choix d'un plan contenant l'axe y de la section; ce plan est fixé par les deux points extrêmes de la *première poutre* du groupe et un troisième point qu'il faut préciser :
 - (a) soit un point existant en un indiquant son numéro
 - (b) soit un point dont on précisera les 3 coordonnées.

FIGURE 8.3.5 – Les tables pour la déclaration des appuis.



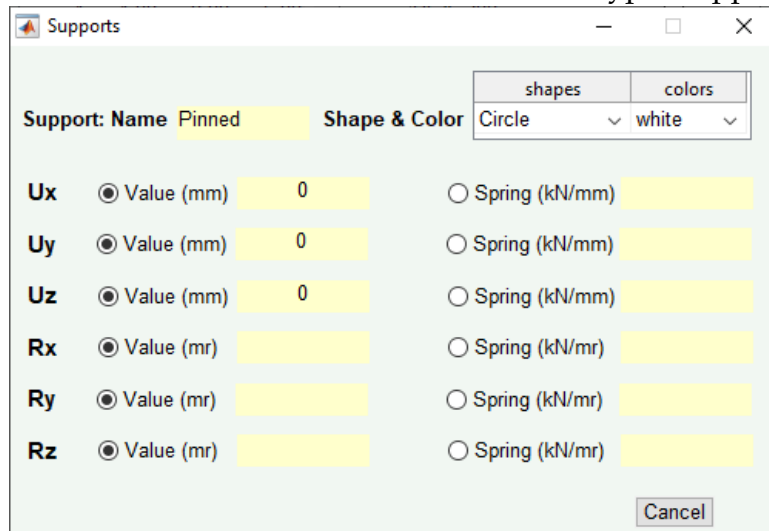
8.3.4 Les appuis

Comme dans **Plane Structure** la déclaration des appuis utilise deux tables (figure-8.3.5) :

table-1 pour *définir les appuis*; cette table contient la liste de tous les types d'appuis qui ont été définis. Elle contient par défaut les types d'appuis classiques : encastrement (fixed) et rotule (Pinned).

table-2 pour *affecter les appuis à la structure*, en les choisissant parmi la liste des types d'appuis disponibles dans la table-1. Par exemple dans la figure-8.3.5 : un encastrement a été affecté aux nœuds 1, 8 et 12 de la structure et une rotule au nœud 14.

FIGURE 8.3.6 – Fenêtre de définition d'un type d'appui.



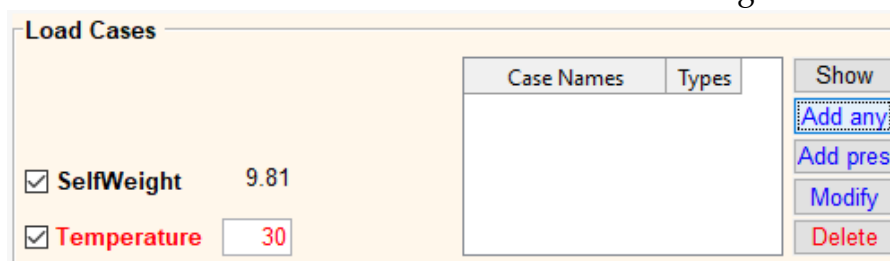
Définition des appuis. Les boutons Show, Add et Modify de la table-1 affiche une fenêtre (figure-8.3.6) permettant de montrer de rajouter ou de modifier un type d'appui. Dans la définition d'un type d'appui, chaque degré de liberté (DDL) de translation ou de rotation peut être (bouton radio) :

- imposé à une valeur réelle (ou nulle pour un blocage)
- ou bien associé à une rigidité élastique

Enfin, un type d'appui porte un *nom* et il lui est associé un *symbole* et une *couleur*. Ainsi, mis à part les appuis proposés par défaut, l'utilisateur peut définir des appuis particuliers et les symboles pour les représenter au niveau graphique.

8.4 La déclaration des chargements

FIGURE 8.4.1 – Déclaration des cas de charge.



La déclaration des chargements se fait par cas de charge dans le cadre Load Cases (figure-8.4.1). Deux cas de charges sont prédéfinis :

- SelfWeight** le poids propre
- Temperature** la variation globale de température qu'il faut préciser

il suffit de les cocher. Par ailleurs un nombre illimité de cas de charges peuvent être déclarés dans la table située à droite ; celle-ci permet d'introduire des cas de charges de type quelconque (*any*) ou de type pression (*press*). Pour ces cas de charges leur déclaration est absolument similaire à celle présentée (section-6.4) dans le module **Plane Structure**, sauf que les chargements sont ici dans l'espace et non dans le plan.

8.5 Calculs d'équilibre et résultats

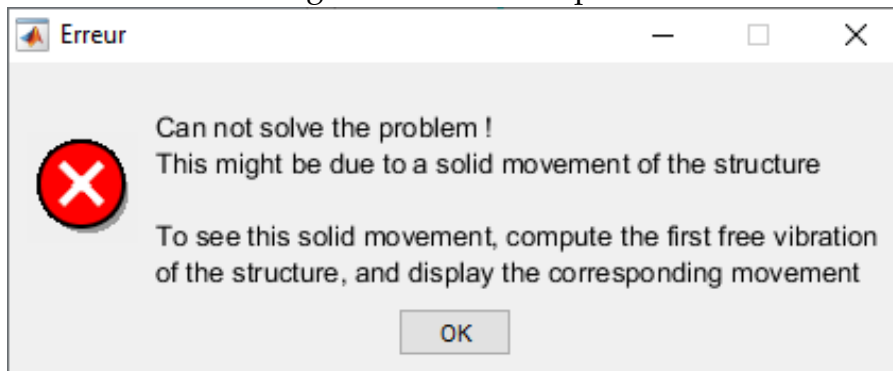
Une fois la structure, les appuis et les chargements déclarés, un calcul d'équilibre peut être exécuté.

Dans la barre des menus, *Analyse* > *Equilibrium* permet d'afficher le cadre réservé aux calcul d'équilibre. Ce cadre est séparé en deux : en bas figure le bouton **Solve** et la partie supérieure est réservée à l'affichage des résultats du calcul d'équilibre dès sa résolution.

8.5.1 La résolution

Le bouton **Solve** lance la résolution de l'équilibre pour tous les cas de charge qui ont été déclarés.

FIGURE 8.5.1 – Message d'erreur dû à la présence de mécanisme.



Cependant, si la structure comporte le moindre *mécanisme* local ou global, la résolution est interrompue, et le logiciel affiche le message d'erreur indiqué dans la figure-8.5.1.

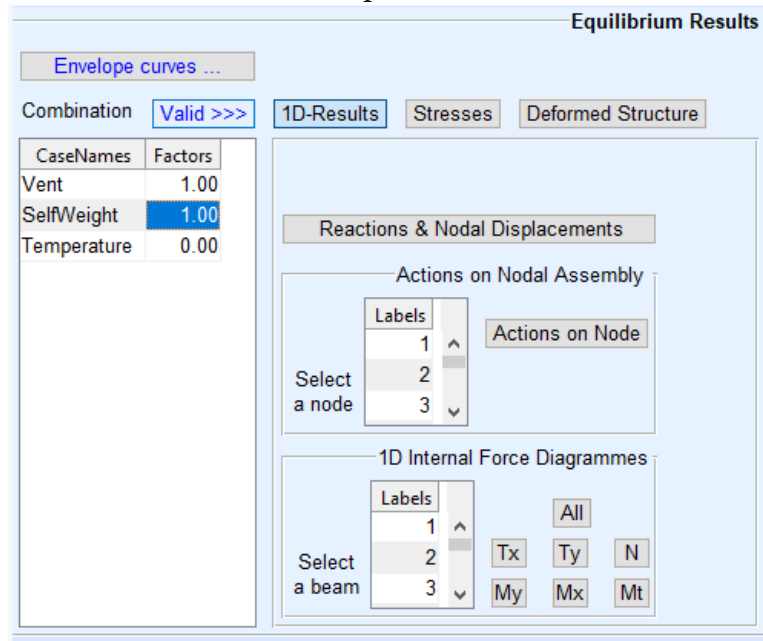
Ce message signale que le problème ne peut être résolu, et que cela est probablement dû à la présence d'un mécanisme (ou plusieurs) dans la structure. Pour visualiser ce(s) mécanisme(s), le message suggère de visualiser les premiers modes de vibration de la structure. Les mécanismes sont les modes de vibration de fréquences nulles. Leur visualisation (et animation) devrait aider à corriger la structure et les éliminer.

Comme dans **Plane Structure**, l'affichage ou l'exploitation des résultats de calcul ne se fait par *combinaison de cas de charge*.

Pour voir des résultats, l'utilisateur doit déclarer une combinaison de cas de charge par l'introduction des facteurs qui lui sont associés dans la colonne *Factors* de la table de combinaison (pour voir les résultats d'un cas de charge particulier, il suffit de lui associé le facteur 1, et garder les autres nuls).

Pour une combinaison de cas de charge, **Valid >>>** génère l’affichage d’un ensemble d’onglets permettant d’accéder aux différents résultats qui correspondent à la combinaison choisie (figure-8.5.2).

FIGURE 8.5.2 – Fenêtre de résultats pour une combinaison de cas de charge.

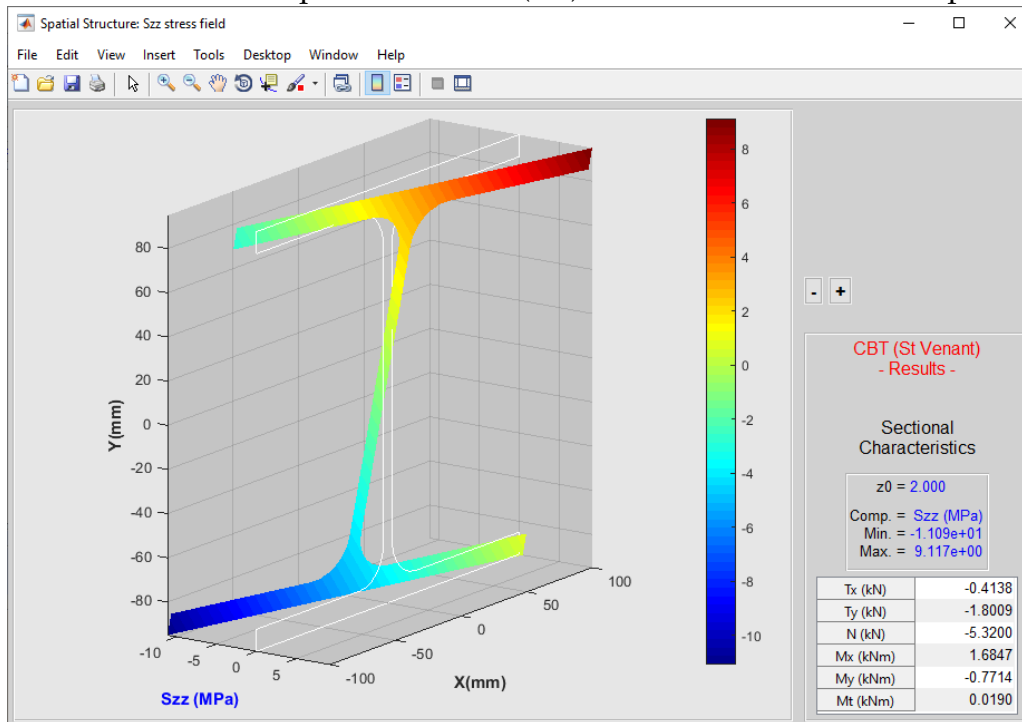


8.5.2 Les résultats

Les résultats associés à une combinaison de cas de charge sont accessibles via les différents onglets et boutons qui apparaissent des validation de la combinaison des cas de charge. La description des résultats est similaire à celle présentée (section-6.5.2) pour le module **Plane Structure** sauf que :

- pour une structure 3D, on ne donne pas d’épure des diagrammes des efforts intérieurs sur la structure,

FIGURE 8.5.3 – Champ de contrainte (σ_{zz}) au droit d'une section de poutre.



- pour une poutre, on ne donne pas les contraintes (axiales) sur les fibres extrêmes, mais le champ de contrainte (figure-8.5.3) qui règne dans la section (au droit d'une abscisse quelconque de la poutre); ce champ de contrainte est proposé pour chacune des composantes du tenseur contrainte, et il est affiché par matériau pour le cas d'une section hétérogène.

8.6 Calculs de vibrations et résultats

Les calculs de vibration de la structure fournissent :

- les premiers modes de vibration naturelle et leur fréquence ;
- ou les premiers modes de vibration autour d'un état chargé et leur fréquence.

Pour peu que l'option Vibration ait été sélectionnée via **Analyses Options** de la barre des menus, **Analyses** fait apparaître (figure-8.6.1) sous l'onglet Vibration, une zone d'analyse scindée en deux cadres :

Vibration Data dédié à la déclaration des données d'un calcul de vibration

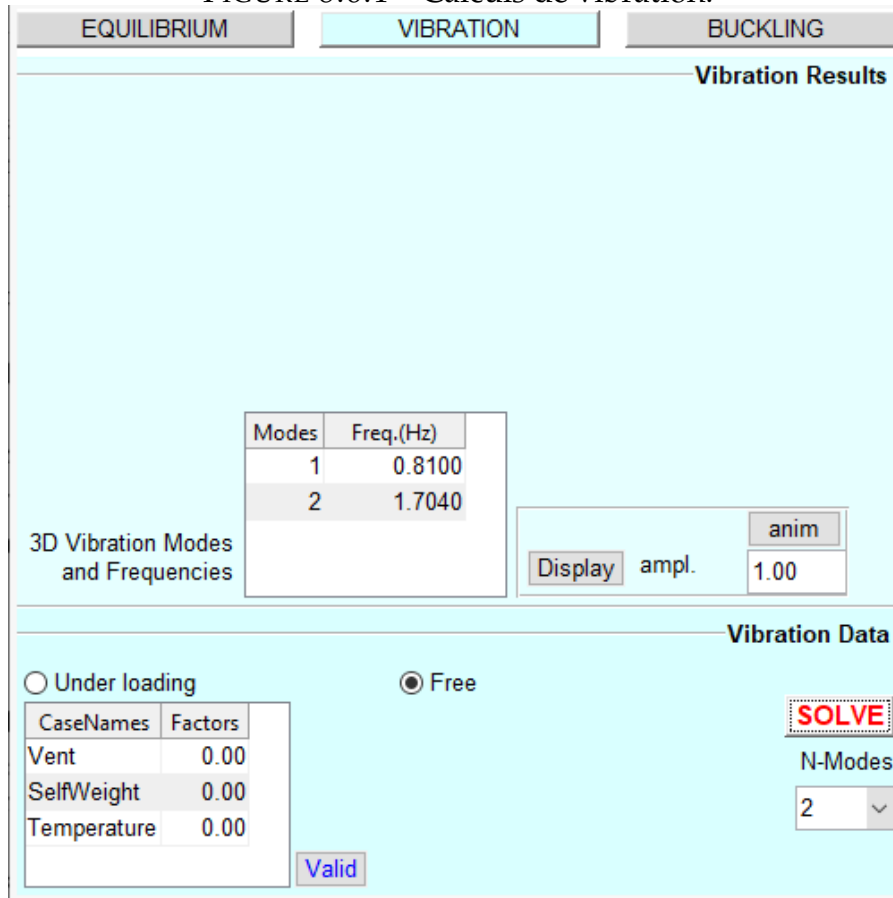
Vibration Results dédié à l'affichage des résultats dès que les calculs de vibration sont effectués.

Les données, dans le cadre Vibration Data, sont :

N-Modes le nombre de modes souhaités (1 à 10)

Free le bouton radio qu'il faut sélectionner pour un calcul de vibrations libres (ou naturelles)

FIGURE 8.6.1 – Calculs de vibration.



Under loading le bouton radio qu'il faut sélectionner pour un calcul de vibrations autour d'un état chargé défini par une combinaison (validée) de cas de charge.

Solve permet, une fois les données précisées, de lancer le calcul de vibration.

Dès résolution, il apparaît dans le cadre supérieur (figure-8.6.1), une table contenant les valeurs (en Hz) des premières fréquences; et il est possible d'afficher et d'animer le mode de vibration de la structure correspondant à une fréquence sélectionnée dans la table des fréquences.

8.7 Calcul de flambement et résultats

Les calculs de flambement de la structure fournissent :

- les premiers modes de flambement et leur charge critique pour l'amplification d'un chargement à partir de l'état naturel;
- les premiers mode de flambement et leur charge critique pour l'amplification d'un chargement, à partir d'un état préchargé.

Pour peu que l'option Buckling ait été sélectionnée via **Analyses Options** de la barre des menus, **Analyses** fait apparaître (figure-8.7.1) sous l'onglet Buckling, une zone d'analyse scindée en trois cadres, dont deux concernent les calcul de flambement de la structure :

Buckling Data dédiée aux données d'un calcul de flambement de structure

Buckling Results dédié à l'affichage des résultats dès que les calculs de flambement sont effectués.

FIGURE 8.7.1 – Calculs de flambement de la structure.

The screenshot shows the 'BUCKLING' tab of a software interface. It is divided into three main sections:

- Effective Lengths:** Contains a 'Loading' table with 'Valid' status, a 'Labels' list (1-4), and an 'Effective Lengths' table with a 'SOLVE' button.

CaseNames	Factors
Vent	0.00
SelfWeight	0.00
Temperature	0.00

Labels	xz-EfLe	yz-EfLe
1	0.61	0.64
2	0.93	0.95
- Buckling Results:** Contains a 'Modes' table, '3D Buckling Modes and Critical values' text, and a 'Display ampl.' control.

Modes	Crit. ampl.
1	-2.8590
2	2.8810
- Buckling Data:** Contains 'Permanent loading' checkbox, 'Amplified loading' table, 'Valid' buttons, and 'N-Modes' dropdown.

CaseNames	Factors
Vent	0.00
SelfWeight	0.00
Temperature	0.00

CaseNames	Factors
Vent	1.00
SelfWeight	0.00
Temperature	0.00

Les données, dans le cadre Buckling Data, sont :

N-Modes le nombre de modes souhaités (1 à 10)

Amplified Loading le chargement qu'il faut amplifier; ce chargement étant défini par une combinaison (validée) de cas de charge.

Permanent loading qu'il faut cocher pour un calcul de flambement correspondant à l'amplification du chargement (**Amplified Loading**) à partir d'un état préchargé (stable); ce préchargement étant aussi défini par une combinaison validée de cas de charge.

Solve permet, une fois les données précisées, de lancer le calcul de flambement.

Dès résolution, il apparaît (figure-8.7.1) dans le cadre **Buckling Results**, une table contenant les valeurs critiques de l'amplification du chargement. et il est possible d'afficher pour chaque valeur critique la déformée de la structure correspondant au mode de flambement qui lui est associé.

8.8 Calcul de longueurs de flambement

Le module **Spatial Structure** assure le calcul des deux longueurs de flambement d'un quelconque élément de la structure, en prenant en compte ou pas le chargement de la structure.

Pour peu que l'option **Buckling** ait été sélectionnée via **Analyses Options** de la barre des menus, **Analyses** fait apparaître (figure-8.7.1) sous l'onglet **Buckling**, une zone d'analyse scindée en trois cadres : celui du haut, **Effective Lengths**, concerne les calculs des longueurs de flambement d'un ou plusieurs éléments de la structure.

FIGURE 8.8.1 – Calculs de longueurs de flambement.

The screenshot shows the 'Effective Lengths' dialog box. It includes a 'Loading' checkbox (unchecked), a 'Valid' button, and a table of case names and factors. A 'Select a beam' label is next to a list of beam labels (1, 2, 3, 4), with labels 1 and 2 selected. A 'SOLVE' button is in the top right. A table on the right displays the calculated effective lengths for the selected beams.

CaseNames	Factors
Vent	0.00
SelfWeight	0.00
Temperature	0.00

Select a beam

Labels	xz-EfLe	yz-EfLe
1	0.61	0.64
2	0.93	0.95

Dans ce cadre (figure-8.8.1) :

Select beam(s) permet de sélectionner les poutres pour lesquelles les longueurs de flambement doivent être calculées.

Loading correspond au chargement à éventuellement considérer pour la structure (en cochant la case) ; un chargement étant défini par une combinaison (validée) de cas de charge.

Solve pour lancer le calcul des longueurs de flambement.

Dès résolution, les résultats apparaissent dans la table de droite pour chacune ses poutres sélectionnées. Cette table donne pour chaque poutre, les deux longueurs de flambement correspondant au flambement par flexion dans chacun des deux plans (x, z) ou (y, z) de la poutre.

Annexe A

La théorie classique des poutres Classical Beam Theory (CBT)

Sommaire

A.1	Introduction	137
A.2	Poutre : définitions et notations	137
A.2.1	Equilibre d'une poutre	137
A.2.2	Définition d'une théorie (1D) de poutre	138
A.3	Principe de Saint Venant et théories classiques de poutre.	139
A.3.1	Principe de Saint Venant et solution 3D de Saint Venant.	139
A.3.2	Théories classiques de poutre	139
A.4	La théorie classique des poutres	141
A.4.1	Le système d'équations 1D et la solution 1D	142
A.4.2	La solution 3D associée	143
A.4.3	Caractéristiques Mécaniques de Section (CMS)	144
A.4.4	Résumé des équations de la théorie classique des poutres	145
A.5	Caractéristiques Mécaniques de Section	146
A.5.1	Cas d'une section homogène isotrope	146
A.5.2	Cas d'une section composite quelconque	149
A.5.3	Commentaires	153
A.6	Domaine de validité et effets de bords	153
A.7	Que faut-il retenir?	155

A.1 Introduction

Quand on parle de théories classiques de poutre, c'est à dire celles *communément* utilisées, ce sont systématiquement celles de Timoshenko ou de Bernoulli qui sont avancées, selon que l'on souhaite ou pas rendre compte des cisaillements d'effort tranchant.

Le qualificatif *classique* (décliné ici en italique) obéit à une définition précise et dans laquelle s'inscrivent toutes les théories de poutres qui s'appuient sur le Principe de Saint Venant.

Les théories de Timoshenko ou de Bernoulli font naturellement partie des théories *classiques* de poutre. Cependant, elles ne représentent que des formes *approchées* de la théorie *classique* de poutre de *référence* qu'est celle (peu connue) de Saint Venant¹ éten- due actuelle s'applique aussi au cas des poutres de *section hétérogène quelconque*. Et c'est cette dernière qui est implémentée dans **CSB**.

Dans ce chapitre, nous reviendrons sur la définition précise d'une théorie *classique* de poutre, avant de décrire les équations qui gouvernent la théorie *classique* de référence qu'est la **théorie de poutre de Saint Venant (TPSV)**. Ce sera l'occasion de fixer quelques notations et préciser les différentes quantités qui interviennent dans l'équilibre d'une poutre.

Un intérêt particulier sera accordé aux *caractéristiques de section* qui, ici, ne s'arrêtent pas seules constantes (*de forme*) telles que l'aire, les moments d'inerties, la constante de torsion, ... etc. . Il en existe d'autres tout aussi importantes, qu'il n'est pas commun d'évoquer et qui sont aussi exploitées par les modules de calcul de poutres de **CSB**.

L'objectif de cet exposé, dont les aspects théoriques sont réduits à l'essentiel, est que le lecteur retrouve les quantités qu'il a l'habitude de manipuler en termes de RDM, et qu'il saisisse « ce que lui apporte de plus » l'exploitation pratique de la théorie de poutre de Saint Venant; déjà pour le cas homogène isotrope, puis pour le cas hétérogène (composite) quelconque.

Enfin, comme pour toute théorie, son domaine de validité sera précisé. Cela permettra d'évoquer l'influence des *effets de bords* dont on s'affranchit en s'appuyant le Principe de Saint Venant, mais qui peuvent remettre en cause l'application ou l'utilisation d'une théorie *classique* des poutres.

A.2 Poutre : définitions et notations

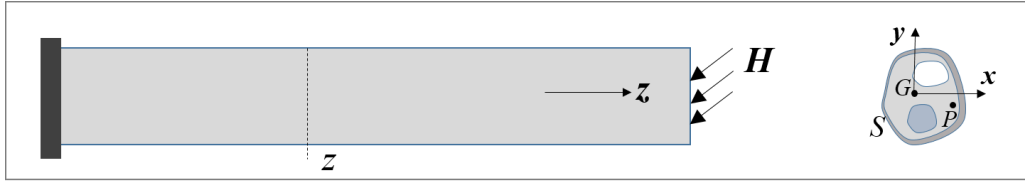
Une poutre est un solide tridimensionnel (3D) *élancé* selon *une* direction.

A.2.1 Equilibre d'une poutre

On se donne pour la clarté de l'exposé, l'équilibre d'une poutre console (figure-A.2.1) de longueur L d'axe z , de section constante S , soumise à une force surfacique H appliquée sur

1. Etablie à l'origine par Saint Venant pour le cas homogène isotrope, la théorie de poutre de Saint Venant a été assez récemment (1976) éten- due au cas des sections hétérogènes de formes quelconques et constituées de matériaux anisotropes librement agencés.

FIGURE A.2.1 – Problème de référence



la section extrémité S_L . G est le centre de la section, P un point de la section et on note (x, y) les axes de la section.

La section S est supposée hétérogène quelconque : de forme quelconque et constituée de matériaux élastiques (isotropes ou anisotropes) librement agencés.

La solution 3D à l'équilibre est notée $\langle \mathbf{U}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ où \mathbf{U} désigne le champ de déplacement et $\boldsymbol{\sigma}$ le champ de contrainte dans la poutre.

Notations.

Pour la suite, on introduit, au droit de la section courante S d'abscisse z et de normale z , le tenseur des actions intérieures \mathcal{T} défini par

$$\mathcal{T}(z) = \begin{cases} \mathbf{R}(z) = \int_S \boldsymbol{\sigma}(z) dS \\ \mathbf{M}(z) = \int_S \mathbf{GP} \wedge \boldsymbol{\sigma}(z) dS \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

et le tenseur \mathcal{F} associé à l'action extérieure H

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \mathbf{F} = \int_S \boldsymbol{\sigma}(z) dS \\ \mathbf{C} = \int_S \mathbf{GP} \wedge \boldsymbol{\sigma}(z) dS \end{cases} \quad (\text{A.2.2})$$

\mathcal{T} et \mathcal{F} sont naturellement liés par l'équilibre et la condition aux limites $\mathcal{T}(L) = \mathcal{F}$; (vecteurs, tenseurs, et tenseurs sont simplement notés en caractère gras).

A.2.2 Définition d'une théorie (1D) de poutre

Une théorie de poutre est une théorie *simplifiée* permettant d'aboutir à une *approximation* (suffisante au sens de l'ingénieur) de la solution 3D $\langle \mathbf{U}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$.

Généralement, la *simplification* exploite le caractère *élancé* de la poutre selon une direction (z), pour proposer un ensemble d'équations 1D dont la résolution (plus simple) permet de générer une solution 3D *approchée*.

La *qualité* d'une théorie de poutre (1D) ne vaut, naturellement, que par la *qualité* de la solution 3D *approchée* à laquelle elle aboutit.

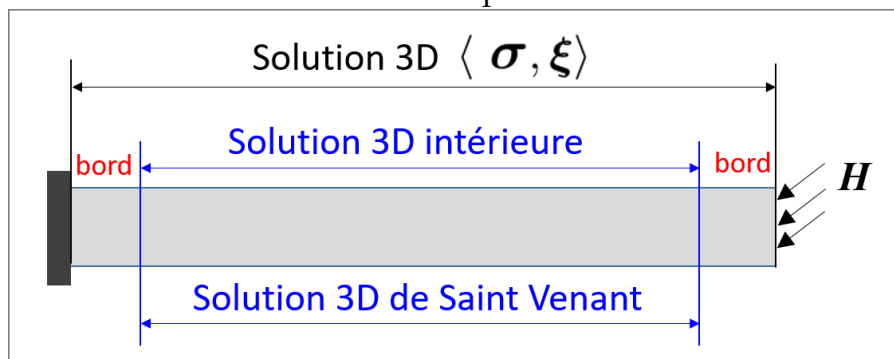
A.3 Principe de Saint Venant et théories *classiques* de poutre.

A.3.1 Principe de Saint Venant et solution 3D de Saint Venant.

Principe de Saint Venant. Quand on s'écarte des **bords** (figure-A.3.1), la solution 3D exacte $\langle \mathbf{U}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ tend *asymptotiquement* vers une **solution 3D intérieure** qui ne dépend² que du torseur des actions intérieures \mathcal{T}
... et cette **solution 3D intérieure** est donnée par la **solution 3D de Saint Venant**.

En d'autres termes, la **solution 3D de Saint Venant** qu'on notera $\langle \mathbf{U}_{sv}, \boldsymbol{\sigma}_{sv} \rangle$, représente, loin des **bords**, la solution 3D exacte $\langle \mathbf{U}, \boldsymbol{\sigma} \rangle$ dans la zone intérieure.

FIGURE A.3.1 – Principe de Saint Venant



A.3.2 Théories *classiques* de poutre

Une théorie *classique* de poutre est une théorie simplifiée qui s'appuie sur le Principe de Saint Venant et dont l'*objectif* se limite *fatalement* à *approcher* la **solution 3D intérieure**, ... c'est à dire la **solution 3D de Saint Venant** $\langle \mathbf{U}_{sv}, \boldsymbol{\sigma}_{sv} \rangle$.

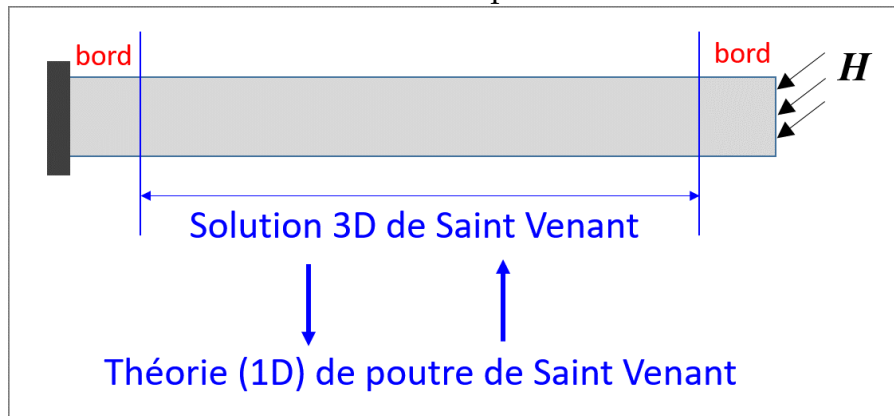
Il est important de souligner que s'appuyer sur le Principe de Saint Venant conduit d'emblée, pour une théorie de poutre, à ne *retenir* des actions intérieures ou extérieures agissant au droit d'une section que leur *torseur résultant* (force et moment).

La théorie de poutre de Saint Venant : la référence

La **Théorie (1D) de Poutre de Saint Venant (TPSV)** est une théorie de poutre qui se déduit de la **solution 3D de Saint Venant** (figure-A.3.2). Elle s'inscrit naturellement dans le cadre d'une théorie *classique* de poutre, sauf qu'elle a l'avantage (ou le privilège) de remonter *exactement* à la **solution 3D de Saint Venant** $\langle \mathbf{U}_{sv}, \boldsymbol{\sigma}_{sv} \rangle$; c'est à dire à la solution 3D *intérieure*. C'est pourquoi, on dira qu'elle représente la théorie *classique* (*exacte* ou) de *référence*.

2. Cette formulation du principe rejoint la formulation classique qui consiste à dire que *loin des bords*, la solution ne dépend pas de la manière précise avec laquelle l'action H est appliquée mais uniquement de son torseur résultant \mathcal{F} .

FIGURE A.3.2 – Théorie de poutre de Saint Venant



La **TPSV** a été établie à l'origine par Saint Venant pour une section homogène isotrope. Elle a été étendue assez récemment (1976) au cas d'une section hétérogène de forme quelconque et constituée de matériaux (isotropes ou anisotropes) librement agencés.

Pour **CSB**, ce qu'on entend par théorie *classique* de poutre et qu'on désigne par **CBT** (Classical Beam Theory), est précisément la récente version étendue au cas composite de la **TPSV**. Le cas homogène isotrope ne constitue désormais qu'un cas particulier.

Autres théories classiques de poutre

Les théories de poutre de Timoshenko, de Bernoulli (ou simplement la RDM³) sont aussi des théories *classiques* de poutres, parce qu'elles s'inscrivent dans le cadre du Principe de Saint Venant. Mais elles ne représentent qu'une forme *approchée* de la **TPSV**.

La **TPSV** existe *formellement* depuis longtemps⁴ mais son exacte application ne peut pratiquement se faire que *numériquement* (même pour le cas homogène isotrope). A défaut de moyen informatique et numérique, des formulations *simplifiées* ont donc été proposées. Cela a donné lieu à des techniques de calculs relativement simples qui ont le mérite d'avoir pu couvrir, depuis quelques décennies (et toujours en vigueur), les besoins de l'ingénierie de la construction.

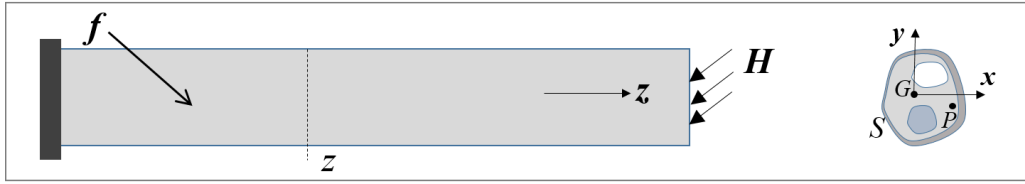
La **TPSV** déclinée avec ces différentes méthodes approchées, qui incluent plusieurs hypothèses simplificatrices (dont en particulier la non déformation de la section ou la répartition des cisaillements), a donné lieu aux théories classiques de poutres qu'il est commun d'associer à Timoshenko et Bernoulli.

La **TPSV** est la version *exacte* de la théorie *classique* des poutres, c'est à dire celle qui ne concède aucune hypothèse supplémentaire à la modélisation des actions extérieures et intérieures définies par les relations eqs-A.2.1-A.2.2. Le mot *exacte* doit aussi sa justification au fait que la **TPSV** permet de remonter à la **solution 3D de Saint Venant** qui, rappelons le encore une fois, représente, loin **des bords**, la solution 3D exacte.

3. RDM est l'acronyme de « Résistance Des Matériaux » qui est la traduction du titre du célèbre livre de Timoshenko « Strength of Materials » édité la première fois en 1930, dont l'auteur aura beaucoup fait pour la formulation et la vulgarisation de la Mécanique des structures (élasticité, poutres, plaques et coques).

4. Du moins pour ce cas homogène isotrope.

FIGURE A.4.1 – Poutre console et actions extérieures



Pour la suite, la théorie *classique* des poutres désignera la [TPSV](#).

A.4 La théorie *classique* des poutres

Pour la présentation des équations qui régissent la [TPSV](#), ou encore la théorie *classique* des poutres, on reprend le problème précédent de la poutre console et ajoute comme action extérieure une force volumique f agissant sur la poutre.

Pour la [TPSV](#), les actions 3D extérieures H et f sont modélisées, respectivement, par les torseurs

$$\mathcal{F} = \begin{cases} F = \int_S \mathbf{H} dS \\ C = \int_S \mathbf{GP} \wedge \mathbf{H} dS \end{cases} \quad ; \quad \pi = \begin{cases} \mathbf{q} = \int_S \mathbf{GP} \wedge \mathbf{f} dS \\ \boldsymbol{\mu} = \int_S \mathbf{GP} \wedge \mathbf{f} dS \end{cases}$$

et les actions intérieures par le torseur des actions intérieures introduit précédemment

$$\mathcal{T}(z) = \begin{cases} \mathbf{R}(z) = \int_S \boldsymbol{\sigma}(z) dS \\ \mathbf{M}(z) = \int_S \mathbf{GP} \wedge \boldsymbol{\sigma}(z) dS \end{cases}$$

et dont les composantes dans $[x, y, z]$ définissent, au droit de la section d'abscisse z , les 6 efforts intérieurs classiques que sont :

$$\begin{aligned} T_x &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} && : \text{l'effort tranchant selon } x \\ T_y &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{y} && : \text{l'effort tranchant selon } y \\ N &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} && : \text{l'effort normal selon } z \\ M_x &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} && : \text{le moment de flexion } /x \\ M_y &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{y} && : \text{le moment de flexion } /y \\ M_t &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{z} && : \text{le moment de torsion} \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

Cette modélisation 1D des actions extérieures et intérieures, au droit d'une section, conduit par *dualité* à décrire les mouvements (1D) au droit d'une section d'abscisse z , par un torseur

$$\mathcal{U}(z) = \begin{cases} \omega(z) & \text{qu'on interprète comme une rotation } \textit{moyenne} \text{ de section} \\ \mathbf{u}(z) & \text{qu'on interprète comme une translation } \textit{moyenne} \text{ de section} \end{cases}$$

et la déformation (1D) associée par un torseur $\mathcal{D}(z) = \mathcal{U}'$, (la dérivée au sens des torseurs), qui s'écrit :

$$\mathcal{D}(z) = \mathcal{U}' = \begin{cases} \omega'(z) \\ \mathbf{u}'(z) + z \wedge \omega(z) \end{cases}$$

où « ' » désigne la dérivée totale par rapport à z .

Le système d'équations qui décrit la **TPSV** est constitué par

- le système d'équations (1D) qui gouvernent les quantités (1D) $\{\mathcal{U}, \mathcal{T}\}$ et qui conduit à la solution (1D) à l'équilibre
- et l'expression de la solution 3D (en déplacement et en contrainte) à laquelle la solution (1D), une fois obtenue, permet de remonter. En l'occurrence, pour la **TPSV**, la solution 3D qui lui est associée est exactement **la solution 3D de Saint Venant**.

Ces équations seront explicitées tout d'abord de manière formelle, et c'est dans un deuxième temps qu'elles seront précisées : pour le cas d'une section homogène isotrope, puis pour le cas d'une section hétérogène (composite) quelconque.

A.4.1 Le système d'équations 1D et la solution 1D

Pour le problème de poutre que nous avons retenu, les différentes quantités 1D $\{\mathcal{U}, \mathcal{T}\}$ sont gouvernées, selon la **TPSV**, par le système d'équations suivant (sous forme torsorielle) :

$$\begin{array}{ll} \text{équilibre local} & \mathcal{T}' + \pi = \mathcal{O} \\ \text{comportement} & \mathcal{D} = \mathcal{U}' = \Lambda_{sv} \mathcal{T} \\ \text{condition en } z = 0 & \mathcal{U}(0) = \mathcal{O} \\ \text{condition en } z = L & \mathcal{T}(L) = \mathcal{F} \end{array} \quad (\text{A.4.2})$$

ou bien (sous forme vectorielle) :

$$\begin{array}{ll} \text{équilibre local} & \begin{bmatrix} \mathbf{R}' + \mathbf{p} \\ \mathbf{M}' + z \wedge \mathbf{R} + \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \text{comportement} & \begin{bmatrix} \mathbf{u}' + z \wedge \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}' \end{bmatrix} = [\Lambda_{sv}] \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \\ \text{condition en } z = 0 & \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \boldsymbol{\omega}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \text{condition en } z = L & \begin{bmatrix} \mathbf{R}(L) \\ \mathbf{M}(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \end{array} \quad (\text{A.4.3})$$

où l'opérateur de souplesse Λ_{sv} , symétrique défini positif (qui se traduit par une matrice 6x6), définit la relation de comportement (1D) de la poutre.

Important. Il est établi que l'opérateur Λ_{sv} ne dépend que de la nature de la section (forme et matériaux). Cet opérateur est considéré comme une **caractéristique** de la section.

A l'équilibre, ce système d'équations (1D) eq-A.4.3 conduit à la solution (1D) en termes de déplacements et d'efforts intérieurs qu'on note :

$$\{\mathcal{U}^e, \mathcal{T}^e\} \quad \text{ou bien} \quad [\mathbf{u}^e(z), \boldsymbol{\omega}^e(z)], [\mathbf{R}^e(z), \mathbf{M}^e(z)] \quad (\text{A.4.4})$$

Cette solution 1D permet aussitôt de générer la **solution 3D de Saint Venant** dont l'expression est donnée dans le paragraphe suivant.

A.4.2 La solution 3D associée

Pour la **TPSV**, la solution 3D associée à la solution 1D $\{[\mathbf{u}^e(z), \boldsymbol{\omega}^e(z)], [\mathbf{R}^e(z), \mathbf{M}^e(z)]\}$ est donnée par la **solution 3D de Saint Venant** dont l'expression est la suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{sv}^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 X_i^e(z) \boldsymbol{\sigma}^i(x, y) \quad (\text{A.4.5})$$

$$\mathbf{u}_{sv}(x, y, z) = \mathbf{u}^e(z) + \boldsymbol{\omega}^e(z) \wedge \mathbf{GP} + \sum_{i=1}^6 X_i^e(z) \mathbf{M}^i(x, y) \quad (\text{A.4.6})$$

où X_i^e désigne les 6 efforts intérieurs $\{T_x^e, T_y^e, N^e, M, M_y^e, M_t^e\}$ et où les quantités $\boldsymbol{\sigma}^i$ et \mathbf{M}^i ne dépendent que de la nature de la section (forme et matériaux); et non du problème de poutre.

Commentaires et interprétations

- Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{sv}^e$, qui est linéaire par rapport aux 6 efforts intérieurs, indique qu'il correspond à chaque effort intérieur un champ de contrainte particulier noté $\boldsymbol{\sigma}^i$.
En d'autres termes, chacun des 6 efforts intérieurs contribue, à sa manière, au champ de contrainte solution. Ces 6 champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^i$ sont aussi des **caractéristiques** de la section, tout autant que l'opérateur de comportement 1D Λ_{sv} !
- Le champ de déplacement peut être scindé en deux :

$$\mathbf{u}_{sv}(x, y, z) = \underbrace{\mathbf{u}^e(z) + \boldsymbol{\omega}^e(z) \wedge \mathbf{GP}}_{\text{mouvement rigide de section}} + \underbrace{\sum_{i=1}^6 X_i^e(z) \mathbf{M}^i(x, y)}_{\text{déformation de section}}$$

la première partie correspond au mouvement de solide rigide de la section et le deuxième à la *déformation* de la section. Ce dernier terme, qui est linéaire par rapport aux 6 efforts intérieurs, indique qu'il correspond à chaque effort intérieur un *mode de déformation* de section donné par un champ vectoriel \mathbf{M}^i particulier.

En d'autres termes, chacun des 6 efforts intérieurs contribue à sa manière, à la déformation de la section. Ces 6 champs de vecteurs, ou (c'est plus parlant) ces 6 modes particuliers de déformation M^i sont aussi des **caractéristiques** de la section, tout autant que l'opérateur de comportement 1D Λ_{sv} et les champs de contraintes σ^i !

A.4.3 Caractéristiques Mécaniques de Section (CMS)

La TPSV (équations 1D et solution 3D associée) a fait apparaître plusieurs **quantités** qui ne dépendent que de la section :

- Λ_{sv} l'opérateur de comportement de la poutre qui, pratiquement, se traduira par une matrice 6x6; nous verrons plus loin que toutes les *constantes de l'ingénieur* qui caractérisent la section peuvent être déduites de cet opérateur.
- et pour chacun des 6 efforts intérieurs $\{T_x^e, T_y^e, N^e, M, M_y^e, M_t^e\}$:
 - σ^i , un champ de contraintes particulier
 - M^i , un mode de déformation particulier pour la section

Ces **caractéristiques** $[\Lambda_{sv}, \sigma^i, M^i]$, qui ne dépendent pas du problème de poutre posé, mais uniquement de la nature de la section (forme et matériaux), peuvent être calculées⁵ une bonne fois pour toutes ! Elles constituent autant d'informations sur la *Mécanique* de la section et sur le comportement de la poutre qu'elle engendre; c'est pourquoi, ces quantités $[\Lambda_{sv}, \sigma^i, M^i]$ sont ici désignés par **Caractéristiques Mécaniques de Section (CMS)**.

5. Pour une section donnée (forme et matériaux, le module **CSection** assure le calcul numérique (par EF-2D) de toutes les caractéristiques $[\Lambda_{sv}, \sigma^i, M^i]$ de la section de manière systématique.

A.4.4 Résumé des équations de la théorie *classique* des poutres

Caractéristiques Mécaniques de Section (CMS) :

$$[\Lambda_{sv}, \sigma^i, M^i]$$

Equations 1D (sauf conditions aux limites)

$$\begin{array}{l} \text{équilibre local} \\ \text{comportement} \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{R}' + \mathbf{p} \\ \mathbf{M}' + z \wedge \mathbf{R} + \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{u}' + z \wedge \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = [\Lambda_{sv}] \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

Solution 1D et solution 3D associée :

$$\begin{aligned} \sigma_{sv}^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^6 X_i^e(z) \sigma^i(x, y) \\ \mathbf{u}_{sv}(x, y, z) &= \mathbf{u}^e(z) + \boldsymbol{\omega}^e(z) \wedge \mathbf{GP} + \sum_{i=1}^6 X_i^e(z) \mathbf{M}^i(x, y) \end{aligned}$$

où $X_i \in \{T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_t\}$.

Commentaires

- La **TPSV** est la théorie *classique* de référence; elle permet de calculer exactement la **solution 3D de Saint Venant** qui représente, loin des **bords**, la solution 3D exacte.
- Telles qu'elles sont résumées, les équations de la **TPSV** sont formellement valides quelle que soit la nature de la section (forme et matériaux). Ce qui distingue le cas homogène du cas hétérogène ou composite, ce sont uniquement les (valeurs des) **CMS**.
- Pour une section donnée, ses **CMS** peuvent être déterminées une fois pour toute. Ce calcul est faisable, numériquement [El Fatmi and Zenzri, 2002], de manière systématique; c'est ce que propose le module **CSection** de **CSB**.
- Pour peu, que les **CMS**, $[\Lambda_{sv}, \sigma^i, M^i]$ soient disponibles, la résolution d'un problème de poutre devient très économique. Elle se réduit en effet à la seule résolution du problème 1D via l'utilisation de l'opérateur Λ_{sv} .
Puis, une fois la solution 1D $[\mathbf{u}^e(z), \boldsymbol{\omega}^e(z)]$, $[\mathbf{R}^e(z), \mathbf{M}^e(z)]$ obtenue, elle permet aussitôt (sans calcul) de *générer* la solution 3D associée, en déplacement et en contrainte, via les quantités M^i et σ^i et les formules données par les formules eqs-A.4.6-A.4.5. C'est ainsi qu'opèrent les modules de calculs de poutres de **CSB**, quand le calcul se fait selon la méthode **CBT** (Classical Beam Theory) qui désigne simplement l'application de la **TPSV**.

A.5 Caractéristiques Mécaniques de Section

Les CMS, $[\Lambda_{sv}, \sigma^i, M^i]$, qui ont tété retenues vont bien au-delà des seules *constantes de l'ingénieurs* (Aire, sections réduites d'effort tranchant, moments d'inertie, constante de torsion, coordonnées du centre de cisaillement (ou de torsion)) dont on verra qu'elles peuvent être déduites (directement pour le cas homogène isotrope) des composantes de l'opérateur de comportement Λ_{sv} .

Quant aux caractéristiques supplémentaires $[\sigma^i, M^i]$ qui constituent autant d'informations sur la *Mécanique* de la section, mais qu'il n'est pas commun d'évoquer ou de considérer, on en donnera des illustrations pour le cas homogène isotrope puis pour le cas composite.

A.5.1 Cas d'une section homogène isotrope

On considère une section de forme quelconque, constituée d'un matériau isotrope de module de Young E , de coefficient de Poisson ν , et on note $G = \frac{1}{1+\nu}$ son module de cisaillement.

Centre et axes de section. Pour expliciter les CMS, il est *commode* de se référer au centre d'inertie G et au repère $[x, y, z]$ où (x, y) sont les axes d'inertie de la section, que l'on rassemble sous l'appellation de repère central principal d'inertie $[G, x, y, z]$.

L'opérateur de comportement 1D. La relation de comportement 1D, $\mathcal{D} = \Lambda_{sv} \mathcal{T}$, s'écrit, en référence au repère central principal d'inertie $[G, x, y, z]$, sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} u'_x - \omega_y \\ u'_y + \omega_x \\ u'_z \\ \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{GA_x} + \frac{y_c^2}{GJ} & \frac{-x_c y_c}{GJ} & 0 & 0 & 0 & \frac{y_c}{GJ} \\ \frac{-x_c y_c}{GJ} & \frac{1}{GA_y} + \frac{x_c^2}{GJ} & 0 & 0 & 0 & \frac{-x_c}{GJ} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EA} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \frac{1}{EI_x} & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{EI_y} & 0 \\ \frac{y_c}{GJ} & \frac{-x_c}{GJ} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_t \end{bmatrix}$$

où les composantes de Λ_{sv} font apparaitre les constantes de la section :

A l'aire de la section

I_x, I_y les moments d'inertie de la section par rapport aux axes x et y ;

J la constante de torsion

A_x, A_y les sections réduites d'effort tranchant; ($A_x = k_x, A_y = k_y A$) $< A$.

x_c, y_c les coordonnées du centre C de cisaillement (ou de torsion); ($\mathbf{GC} = x_c \mathbf{x} + y_c \mathbf{y}$)

Pour le cas d'une section de forme quelconque, ce comportement fait apparaître des termes hors de la diagonale ($\Lambda_{16}, \Lambda_{26}$) qui témoignent d'un couplage de flexion-torsion.

Remarque 2. Dans la matrice de comportement exprimée ici en référence au repère principal d'inertie $[G, x, y, z]$, les termes $\Lambda_{34}, \Lambda_{35}$ de couplage entre l'effort normal et les moments de flexion ainsi que le terme Λ_{45} de couplage entre les deux moments de flexion sont apparus nuls (zéros en gras). Si l'opérateur Λ_{sv} avait été exprimé en référence à un autre centre et d'autres axes de section, ces termes n'auraient pas été nuls!

En fait, G est le point de la section dont le choix conduit à l'annulation dans Λ_{sv} des composantes $\Lambda_{34}, \Lambda_{35}$ et $[x, y]$ sont les axes, dont le choix conduit, en plus, à l'annulation dans Λ_{sv} de la composante Λ_{45} ; c'est d'ailleurs ainsi que ces centre et axes seront définis pour le cas hétérogène quelconque.

Il est d'usage d'appeler G et $[x, y]$ les centre et axes d'inertie; cela est incorrect parce que leur définition n'a pas de rapport avec la masse. On devrait les appeler centre et axes élastiques de la section, parce qu'en rapport avec le comportement. Maintenant, il se fait que pour une section homogène isotrope, les centres géométrique, de masse ou élastique se retrouvent confondus; mais ce ne sera plus le cas pour une section hétérogène quelconque.

Pour le cas d'une section symétrique par rapport aux axes x et y , les coordonnées de C sont nulles ($C = G$) et la matrice $[\Lambda_{sv}]$ devient diagonale; dans ce cas, il est possible d'éclater la loi de comportement en 6 relations simples :

$$\begin{aligned} u'_x - \omega_y &= \frac{T_x}{GA_x} & \omega'_x &= \frac{M_x}{EI_x} \\ u'_y + \omega_x &= \frac{T_y}{GA_y} & \omega'_y &= \frac{M_y}{EI_y} \\ u'_z &= \frac{N}{EA} & \omega'_z &= \frac{M_t}{GJ} \end{aligned}$$

Cette écriture fait apparaître dans les différents dénominateurs des quantités que l'on désigne par :

- les rigidité d'effort tranchant : GA_x, GA_y
- la rigidité d'effort normal : EA
- les rigidités de flexion : EI_x, EI_y
- la rigidité de torsion : GJ

Champs de contraintes de section σ^i

Pour le cas d'une section homogène isotrope, le champ de contrainte de Saint Venant est donné dans $[x, y, z]$ par :

$$\sigma_{sv} = \sum_{i=1}^6 X_i(z) \sigma^i(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

La linéarité du champ de contrainte par rapport aux 6 efforts intérieurs se traduit sur les composantes de σ_{sv} par les relations suivantes :

– la contrainte axiale σ_{zz} ne dépend que de N, M_x et M_y :

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = N(z) \left(\frac{1}{A} \right) + M_x(z) \left(\frac{y}{I_x} \right) + M_y(z) \left(\frac{-x}{I_y} \right)$$

– les contraintes de cisaillement σ_{xy} et σ_{yz} ne dépendent que de T_x, T_y et M_t :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, z) &= f_x^x(x, y)T_x(z) + f_x^y(x, y)T_y(z) + f_x^t(x, y)M_t(z) \\ \sigma_{yz}(x, y, z) &= f_y^x(x, y)T_x(z) + f_y^y(x, y)T_y(z) + f_y^t(x, y)M_t(z) \end{aligned}$$

où encore sous forme vectorielle via le cisaillement $\boldsymbol{\tau} = \sigma_{xz}\mathbf{x} + \sigma_{yz}\mathbf{y}$:

$$\boldsymbol{\tau}(x, y, z) = f^x(x, y)T_x(z) + f^y(x, y)T_y(z) + f^t(x, y)M_t(z)$$

où les fonctions (f^x, f^y, f^t) ne dépendent de la nature de la section.

Contrairement à la contrainte axiale, dont l'expression est explicite et simple, il n'y a pas d'expression simple pour le cisaillement (sauf pour le cas d'une section circulaire). Les fonctions (f^x, f^y, f^t) qui dépendent de la nature de la section peuvent cependant être obtenues numériquement.

Les champs de contraintes types $\boldsymbol{\sigma}^i$ peuvent être déduits des équations précédentes :

$$\boldsymbol{\sigma}^N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}^{M_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y}{I_x} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}^{M_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-x}{I_y} \end{bmatrix}$$

et

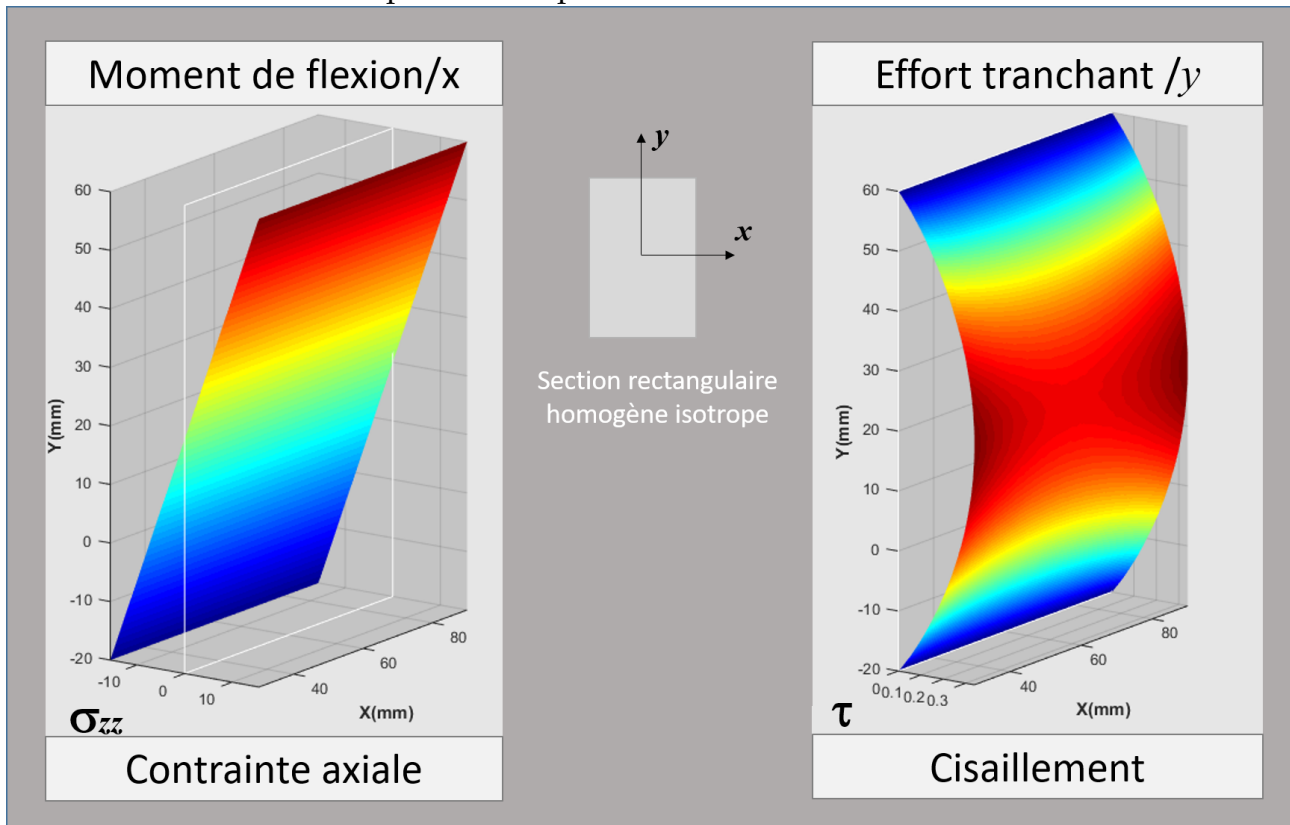
$$\boldsymbol{\sigma}^{T_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_x^x(x, y) \\ 0 & 0 & f_x^y(x, y) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}^{T_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_y^x(x, y) \\ 0 & 0 & f_y^y(x, y) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}^{M_t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_x^t(x, y) \\ 0 & 0 & f_y^t(x, y) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui illustre clairement que les champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^i$ ne dépendent que de la nature de la section.

On montre, ci-dessous, deux champs de contraintes figure-A.5.1 pour une section rectangulaire homogène isotrope. Il serait possible d'afficher un résultat pour chacune des (6) composantes du champ de contrainte relatif à chacun des 6 efforts intérieurs ; mais on n'en donnera (figure-A.5.1), pour illustration, que deux :

- à gauche, la variation des contraintes axiale σ_{zz} dues à un moment de flexion M_x ; elle indique comme attendu une variation linéaire selon y ;
- à droite, la variation du (module de) cisaillement $\boldsymbol{\tau}$ dû à un effort tranchant T_y , dont la forme est quasi-parabolique.

FIGURE A.5.1 – Exemple de champs de contraintes associés aux efforts intérieurs



Modes de déformation de section M^i .

Il est établi que :

- l'effort normal et les deux moments de flexions conduisent à une déformation de la section qui a lieu dans le plan de la section et qui traduit l'*effet Poisson*.
- les efforts tranchants et le moment de torsion conduisent, chacun, à une déformation de la section qui a lieu hors plan de section et qui traduit un *gauchissement*.

La figure-A.5.2 montre les modes de déformations associés aux 6 efforts intérieurs.

A.5.2 Cas d'une section composite quelconque

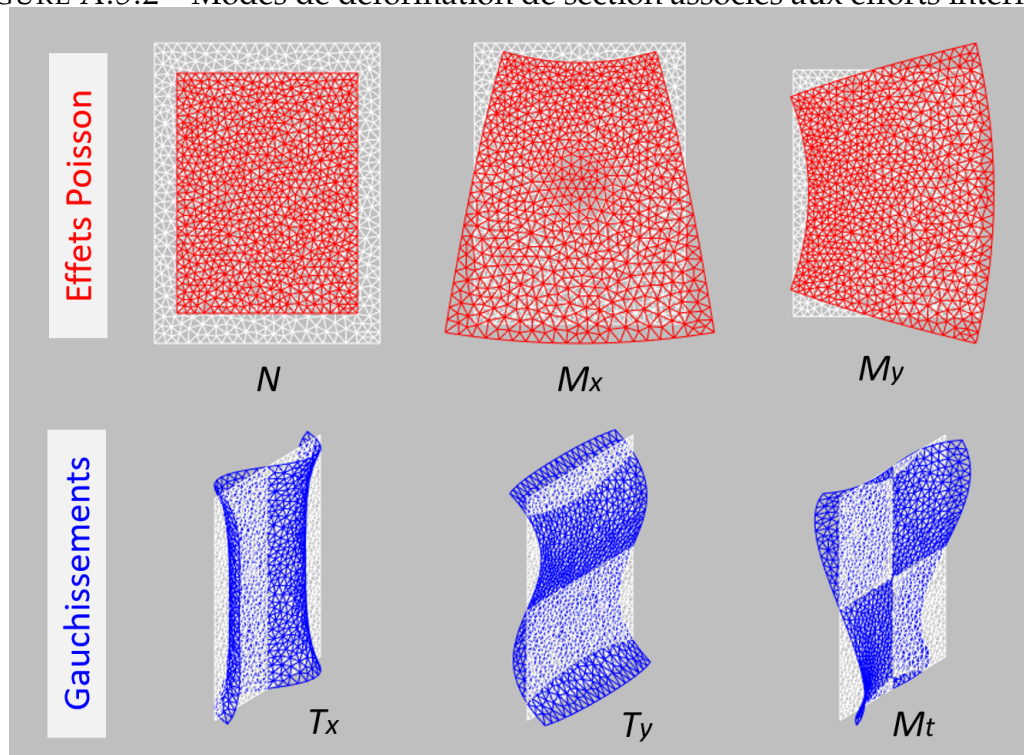
Pour le cas d'une section hétérogène ou composite, il n'y a pas de résultats à expliciter. Il est cependant capital de souligner les *différences* avec le cas homogène isotrope.

Plusieurs centres de section Une section hétérogène quelconque nécessite d'introduire :

G_g le centre *géométrique* qui ne dépend que de la forme de la section

G_m le centre de *masse* qui dépend de la répartition des masses dans la section

FIGURE A.5.2 – Modes de déformation de section associés aux efforts intérieurs



G_e le centre *élastique* qui dépend du comportement de la section ; il est défini comme indiqué dans la remarque-2.

Ces 3 points sont confondus pour le cas homogène isotrope. Maintenant, il est d'usage de désigner le centre *élastique* G_e , par centre *d'inertie élastique* ou simplement centre *d'inertie*.

L'opérateur de comportement 1D

La relation de comportement 1D, $\mathcal{D} = \Lambda_{sv} \mathcal{T}$, pour un cas hétérogène quelconque, peut conduire à une matrice pleine :

$$\begin{bmatrix} u'_x - \omega_y \\ u'_y + \omega_x \\ u'_z \\ \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_t \end{bmatrix}$$

où chaque terme hors de la diagonale [(•) ou (•)] témoigne d'un *type de couplage* qui peut se manifester entre *traction, flexion et torsion*, alors que le seul couplage qui peut apparaître dans le cas homogène isotrope est celui de flexion-torsion qui se manifeste par les termes (•) hors diagonale.

Maintenant si, on se place dans le repère central principal d'inertie, c'est à dire en référence

- au centre G_e , le *centre d'inertie élastique* c' est à dire le point qui conduit au découplage entre N et les deux moments de flexions M_x et M_y
- et aux axes x et y qui conduisent, en plus, à l'annulation du couplage entre M_x et M_y

alors les termes $\Lambda_{34}, \Lambda_{35}$ et Λ_{45} se retrouvent nuls.

Par ailleurs, concernant l'expression de chaque composante de Λ_{sv} , il n'y a pas de termes dont on connaît explicitement la forme; leur valeur peut cependant être obtenue numériquement.

Enfin, par *analogie* au cas homogène isotrope, on convient de noter :

- les rigidités d'effort tranchant : $\widehat{GA}_x, \widehat{GA}_y$
- la rigidité à l'effort normal : \widehat{EA}
- les rigidité de flexion : $\widehat{EI}_x, \widehat{EI}_y$
- la rigidité de torsion : \widehat{GJ}

Ces quantités (ou ces constantes) peuvent être déduites de Λ_{sv} . Attention, il s'agit de *notations* dont les formes ne sont pas séparables! Par exemple \widehat{EA} ne constitue pas la multiplication de E par A (comme dans le cas homogène isotrope); on n'est plus en présence d'un seul matériau!

Contraintes de section σ^i .

Pour le cas d'une section composite quelconque, le champ de contrainte de Saint Venant est donné par :

$$\sigma_{sv} = \sum_{i=1}^6 X_i(z) \sigma^i(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{zz} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

où les composantes (en rouge) dans le plan de la section peuvent être non seulement non nuls, et quelquefois du *même ordre* que les autres!

Pour illustration, on considère une section composite stratifiée constituée d'un empilement à symétrie miroir [0,30,30,0] de plis (isotropes transverses). Ce type de section est connu pour générer un couplage de *flexion-torsion* ($M_x - M_t$) qui, selon les orientations des plis, peut être important. Ce couplage se manifeste clairement dans les champs de contraintes associés à M_x et M_t .

- La figure-A.5.3 montre que le champ de contrainte associé au moment de flexion M_x génère des contraintes axiales σ_{zz} , mais aussi des contranites de cisaillement τ ; on notera que les champs de contraintes sont affichés par matériau (ou par sous domaine, ici par pli);
- Réciproquement, la figure-A.5.4 montre que le champ de contrainte associé au moment de torsion M_t génère des contraintes de cisaillement τ , mais aussi des contraintes axiales σ_{zz} ;

FIGURE A.5.3 – Section composite. Exemples de champs de contraintes associés au moment de flexion/x

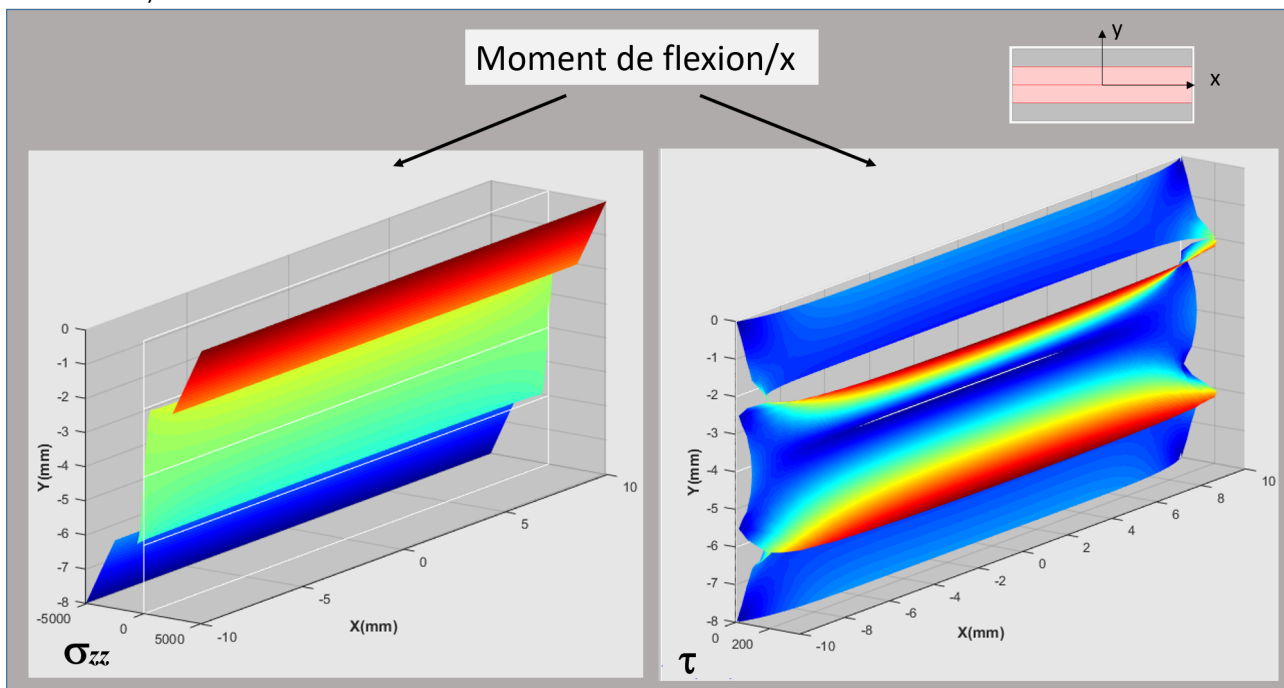


FIGURE A.5.4 – Section composite. Exemples de champs de contraintes associés au moment de torsion : cisaillement et contraintes axiales.

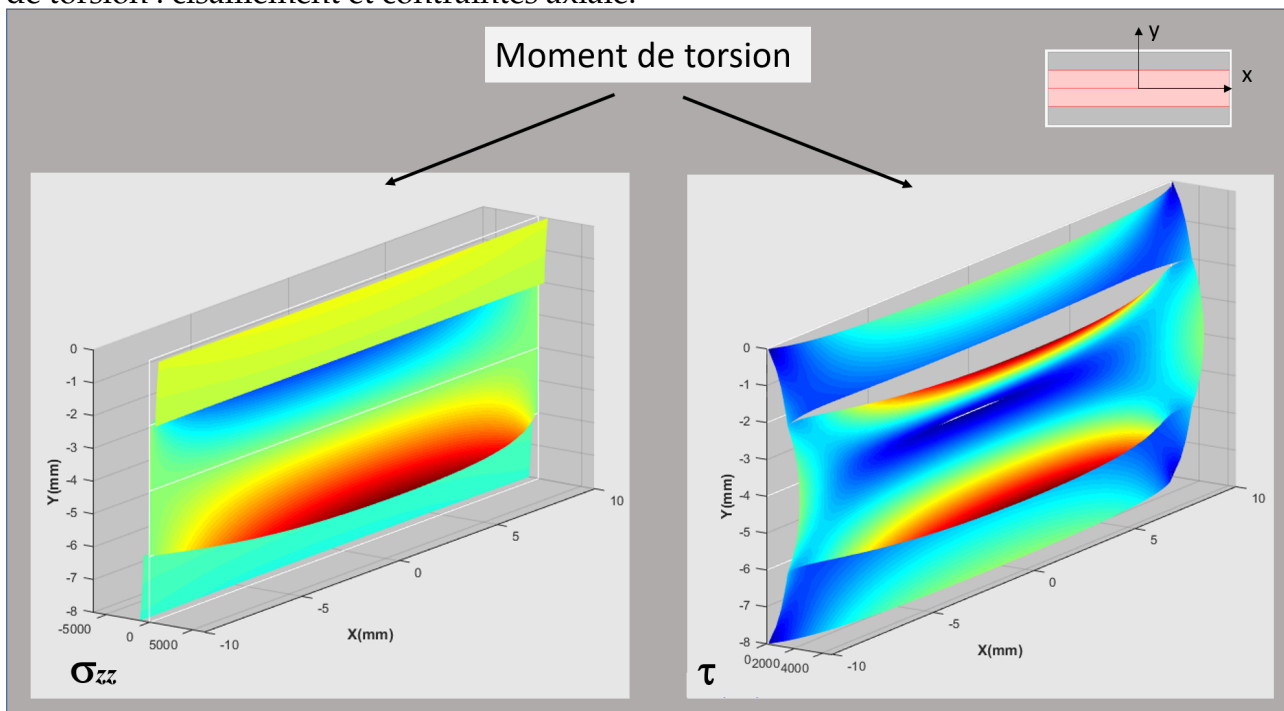
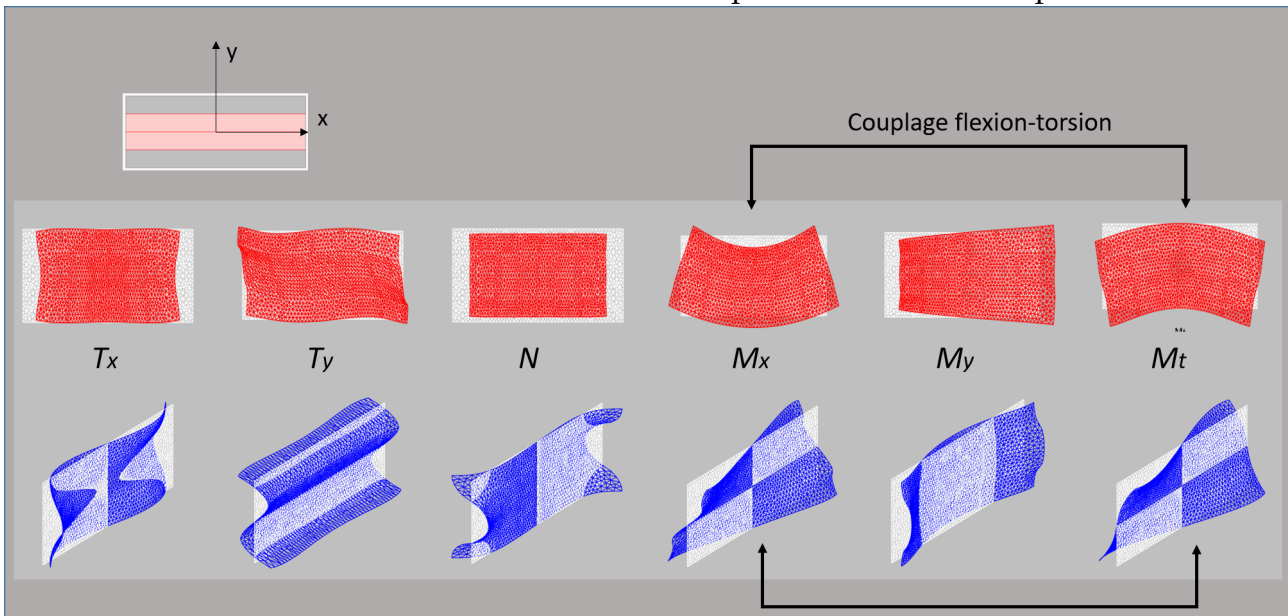


FIGURE A.5.5 – Modes de déformation pour une section composite



Modes de déformations de section M^i .

Contrairement au cas homogène isotrope, chacun des 6 efforts intérieurs peut conduire à un mode de *déformation 3D* qui combine *effet Poisson* et *gauchissement* ;

- La figure-A.5.5 montre, pour la section stratifiée considérée ci-dessus, les modes de déformations associés aux efforts intérieurs. Ces modes sont 3D, mais ils ont été scindés, pour chaque effort intérieur, afin d’afficher les parties planes (effets Poisson) et anti-planes (gauchissements). On remarquera que le couplage *flexion-torsion* se manifeste par des modes similaires pour M_x et M_t .

A.5.3 Commentaires

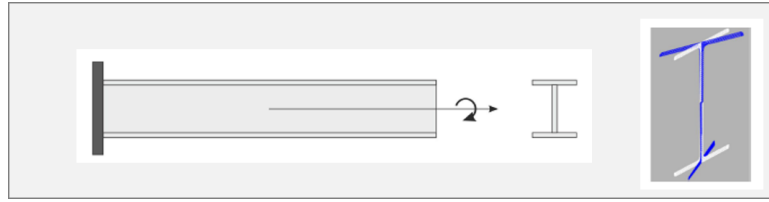
Les quelques résultats ci-dessus pour les cas homogène isotrope puis composite montrent clairement que les CMS, $[\Lambda_{sv}, \sigma^i, M^i]$, constituent bien un ensemble d’informations sur la *Mécanique* de la section compte tenu de sa forme et des matériaux qui la constituent.

Si les *constantes de l’ingénieur* (associés à l’opérateur Λ_{sv}) peuvent être éventuellement utilisées pour un calcul (1D) analytique de poutre, les autres caractéristiques $[\sigma^i, M^i]$ ne peuvent être exploitées que lors d’un calcul numérique pour générer proprement la solution 3D (en déplacement et surtout en contrainte) associée à la solution 1D.

A.6 Domaine de validité et effets de bords

Dans une théorie *classique*, on ne retient d’une action extérieure, au droit d’une section extrémité, que son torseur résultant (force et moment). Cette modélisation, ne peut rendre compte

FIGURE A.6.1 – Torsion d’une poutre console et gauchissement d’une section mince ouverte : libre d’un côté et empêché à l’encastrement.



de la manière précise avec laquelle cette action extérieure est appliquée et, de plus, ne détecte rien si la résultante est nulle. Il s’ensuit que la *validité* de la solution 3D qu’une théorie *classique* génère n’est valable qu’à partir d’une certaine *distance* du bord (Principe de Saint Venant). La *distance* qui caractérise l’*effet de bord* dépend de la nature de la section et de la distribution exacte de l’action imposée au bord.

De plus, les conditions de bord ne se limitent pas aux conditions en force. En effet, dans une théorie *classique*, les conditions d’appuis sont réduites à des conditions sur le mouvement $[\mathbf{u}, \omega]$ global de la section au droit de l’appui, pas sur la *déformation* de la section. Ainsi, les conditions $[\mathbf{u} = \mathbf{0}, \omega = 0]$ ne permettent pas, par exemple, d’imposer un réel encastrement (déformation nulle). C’est encore là, une condition qui contribue à l’*effet de bord*.

L’influence des effets de bords *s’estompent* quand l’*élancement* de la poutre devient important. Certes, mais il existe des cas pour lesquels ces effets de bord ne peuvent être ignorés parce qu’ils s’étendent *notablement* dans la zone *intérieure* de la poutre. Le cas échéant, la solution tant 1D que 3D à laquelle conduit une théorie *classique* de poutre peut être remise en cause.

C’est par exemple le cas pour une poutre console en torsion dont la section est mince ouverte (figure-A.6.1); le gauchissement, libre d’un côté, est empêché au droit de l’encastrement. Dans ce cas la torsion de Saint Venant (celle contenue dans la *TPSV*) qui prévoit un gauchissement constant selon l’axe de la poutre doit céder la place à la *torsion dite gênée* de Vlasov. Celle-ci, en permettant un gauchissement de torsion *variable*, permet de rendre compte de l’*effet du gauchissement empêché* et conduit à une solution plus réaliste, en déplacement et en contrainte.

Si pour le cas homogène isotrope, pratiquement, le seul effet de bord important concerne le gauchissement d’un profilé mince ouvert, il peut se manifester dans bien d’autres configurations pour une poutre de section composite; cela dépend de nature de la section (forme et matériaux), et des conditions aux limites en force et en déplacement.

Il devient donc nécessaire, pour la pratique, de proposer une théorie de poutre qui va *au-delà* de celle *classique* de Saint Venant, pour rendre compte (au moins de l’essentiel) des *effets de bords* quand ils sont importants; qu’il s’agisse de poutre homogène isotrope ou composite. C’est ce que propose la théorie **RBT** (Refined Beam Theory) présentée dans le chapitre-B. En attendant, **RBT** peut être vue comme une *très large généralisation* de la théorie de Vlasov, qui serait valable pour le cas composite quelconque, une sollicitation quelconque (pas que de torsion) et permettant de contrôler tous les modes de déformation de la section (pas que le gauchissement).

A.7 Que faut-il retenir?

Il est tout d'abord important de retenir que la **TPSV** laisse libre la *déformation de la section* et qu'elle s'affranchit pour le cas hétérogène ou composite, de toute homogénéisation des matériaux de la section.

La **TPSV** est la version *exacte* de la théorie *classique* des poutres. Elle est valable pour le cas homogène ou composite, et conduit à la solution 3D dans la zone *intérieure* de la poutre, *loin des bords*.

Cependant, l'exploitation de la **TPSV** nécessite la détermination préalable de toutes les caractéristiques mécaniques de section (**CMS**), mais celles-ci ne sont pratiquement accessibles (même pour le cas homogène isotrope) que numériquement.

A défaut d'ordinateur et de méthodes numériques appropriées, des méthodes *simplifiées* ont été proposées pour approcher ces quantités de section; cela a donné lieu à des théories qu'il est commun d'associer à Timoshenko ou Bernoulli. Théories qui ont le mérite, depuis quelques décennies, d'avoir pu couvrir les besoins de l'ingénierie de la construction.

Aujourd'hui, chaque ingénieur dispose d'un PC permettant l'exploitation (numérique) effective de la **TPSV**, quelque soit la nature de la section, homogène ou composite. C'est ce que propose le logiciel **CSB**. Dans **CSB**, la **TPSV** est désignée par **CBT** (Classical Beam Theory).

De plus, pour rendre compte des effets de bords dont l'influence ne peut être négligée, **CSB** propose l'exploitation d'une théorie de poutre (chapitre-B) qui va au-delà de celle de Saint Venant, désignée par **RBT** (Refined Beam Theory), pour rendre compte de ces *effets de bords*.

Ainsi, dans **CSB**, pour calculer une poutre (homogène ou composite), deux méthodes de calcul, désignées par **CBT** et **RBT**, sont disponibles :

- **CBT**, *classique*, selon la théorie *classique* de référence qu'est la **TPSV**
- **RBT**, *avancée*, selon une théorie qui va *au-delà* de la **TPSV** pour rendre compte des effets de bords. Cette théorie fait l'objet du chapitre-B suivant.

Annexe B

Une théorie non-classique de poutre Refined Beam Theory (RBT)

Sommaire

B.1	Introduction	157
B.2	Expression générale d'un modèle d'ordre supérieur	157
B.3	Le modèle RBT	158
B.3.1	Le choix des modes de déformation de section	158
B.3.2	Le modèle de déplacement de RBT	160
B.4	La théorie de poutre RBT	161
B.4.1	La solution RBT	163
B.5	Que faut-il retenir de RBT?	164

RBT (*Refined Beam Theory*) est une théorie de poutre qui se base sur un modèle de déplacement particulier qui la classe parmi les théories de poutre dites d'ordre supérieur. Le but de ce chapitre n'est pas de décrire en détails les aspects théoriques inhérents au développement de cette théorie, mais d'en donner l'essentiel afin que l'utilisateur en saisisse l'intérêt par rapport à une approche classique, et la portée d'un point de vue pratique, pour les applications.

B.1 Introduction

Une théorie *classique* de poutre n'est applicable que si les *effets de bords* dus aux conditions d'extrémité restent *confinés* aux bords, et sans grande influence sur la solution. Dans le cas contraire, la théorie *classique* n'est plus applicable et il devient nécessaire de disposer d'une théorie de poutre, que l'on dira *non classique*, à même de rendre compte, au moins de l'*essentiel* de ces *effets de bords*. Ce chapitre est dédié à la présentation d'une très récente théorie *non classique* [El Fatmi, 2016], particulièrement efficace, désignée par **RBT** (*Refined Beam Theory*).

RBT est une théorie générale, valable pour des poutres de section quelconque (forme et matériaux), qui va *au-delà* de la théorie *classique de référence* qu'est la théorie de poutre de Saint Venant (présentée chapitre-A) pour rendre compte d'une majeure partie des *effets de bords*.

La théorie **RBT** se base sur un *modèle de déplacement* dit d'*ordre supérieur*, dont la particularité ou l'originalité est d'être construit à partir de l'expression de la *solution 3D de Saint Venant en déplacement*. On montrera *pourquoi* ou *comment* cette théorie permet de mieux satisfaire les conditions aux limites (en force et déplacement) et, par conséquent, d'espérer rendre compte, au moins en partie, des *effets de bords*.

B.2 Expression générale d'un modèle d'ordre supérieur

Une théorie de poutre dite d'*ordre supérieure* se base sur une cinématique qui permet, en plus du mouvement rigide de la section (Timoshenko, Bernoulli), une *certaine déformation de la section*.

La forme générale d'un modèle de déplacement d'*ordre supérieur* s'écrit :

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \underbrace{\mathbf{u}(z) + \boldsymbol{\omega}(z) \wedge \mathbf{GP}}_{\text{mouvement rigide de section}} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \eta_k(z) \mathbf{M}^k(x, y)}_{\text{déformation de section}}$$

où le second terme permet à la section de se déformer selon des modes \mathbf{M}^k *supposés connus*, et où chaque paramètre $\eta_k(z)$ définit l'amplitude du mode \mathbf{M}^k qui lui est associé.

Les paramètres cinématiques $\{u_x, u_y, u_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \dots, \eta_k, \dots\}$ associés à ce modèle général offrent $6+p$ degrés de liberté (DDL) pour le mouvement de la section droite :

- $\{u_x, u_y, u_z\}$ contrôlent les translations de la section
- $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ contrôlent les rotations de la section
- $\{\dots, \eta_k, \dots\}$ contrôlent les modes de déformations de la section M^k

Le choix des modes de déformation de la section. La *difficulté* dans la formulation d'un modèle de déplacement d'ordre supérieur est le *choix* de la base de modes $\{M^k\}$:

- un *choix* de modes que l'on souhaite le plus *pertinent* pour espérer décrire correctement la déformation de la section.
- un *nombre* de modes que l'on ne souhaite pas trop *grand*, pour garder un temps de calculs viable pour les applications

Une fois la base de modes $\{M^k\}$ choisie, il est assez facile, à partir du modèle de déplacement retenu, de déduire la *théorie de poutre correspondante*; nous dirons que c'est juste *technique*.

Un exemple de théorie d'ordre supérieur. L'exemple de modèle d'ordre supérieur le plus simple et le plus connu est celui de la théorie de Vlasov (évoquée paragraphe-A.6) qui utilise un seul mode M , qui représente le gauchissement de torsion de la section. La théorie de Vlasov permet de rendre compte de l'effet de bord particulier qu'est le *gauchissement gêné* de torsion au droit d'un encastrement, pour un profilé mince ouvert.

B.3 Le modèle RBT

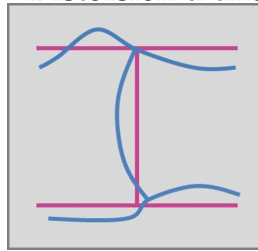
B.3.1 Le choix des modes de déformation de section

Les modes fondamentaux. Le modèle **RBT** considère que les modes de déformations de section $\{M^i\}$ qui expriment la solution 3D de Saint Venant en déplacement (U_{sv}) dont on rappelle ci-dessous l'expression :

$$U_{sv}(x, y, z) = \underbrace{u^e(z) + \omega^e(z) \wedge GP}_{\text{mouvement rigide de section}} + \underbrace{\sum_{i=1}^6 X_i^e(z) M^i(x, y)}_{\text{déformation de section}}$$

sont *fondamentaux* : ils sont *propres à la nature physique* de la section (forme et matériaux) et sont associés aux 6 efforts intérieurs dont on sait le rôle *majeur* dans la *Mécanique* d'une poutre. Pour toute section, ces *modes fondamentaux* peuvent être déterminés de manière systématique par le module **CSection** de **CSB**.

FIGURE B.3.1 – Distorsion d'une section mince

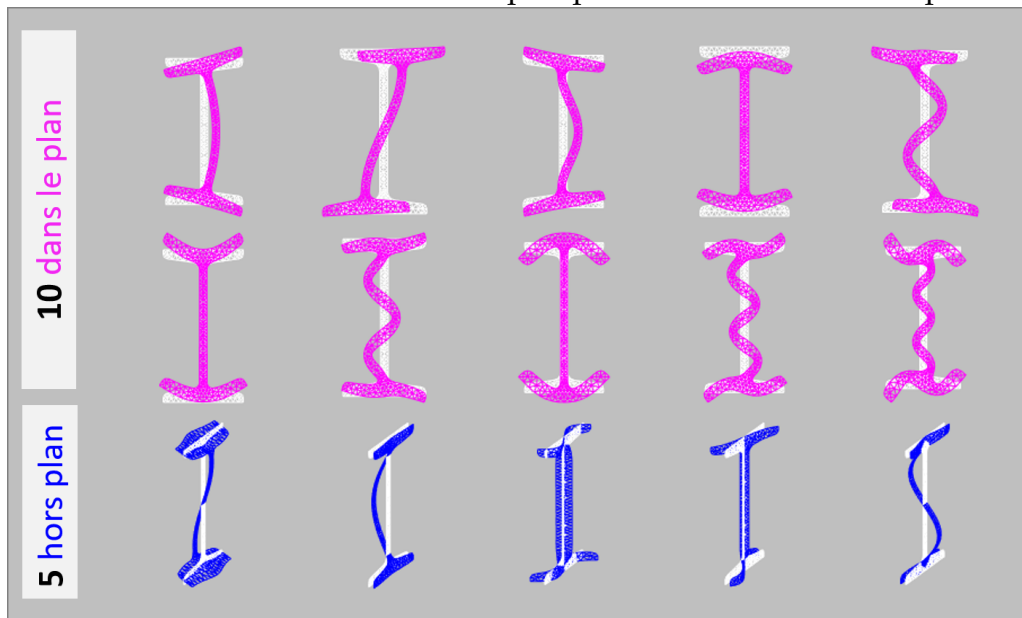


Autres modes de déformation. Les 6 modes fondamentaux $\{M^i\}$ qui sont tout à fait *per-tinents*, et en petit nombre (6), pourraient être suffisants pour générer un modèle de déplacement *d'ordre supérieur* et la théorie de poutre qui lui est associée. Cependant, ces modes qui traduisent *les effets Poisson* et *les gauchissements* d'une section ne peuvent rendre compte de la *distorsion d'une section mince*.

Une distorsion (figure-B.3.1) peut être vue comme le résultat de la *flexion* des branches de la section mince ou simplement comme un *changement de forme du profil* de la section mince. Une *distorsion* de section mince peut par exemple être générée par le chargement particulier d'un profilé mince, ou bien apparaître naturellement dans un mode (3D) de flambement pour un profilé (la distorsion de la section traduit au droit d'une section le *voilement* de l'âme ou des semelles d'un profilé en I).

Pour que le modèle **RBT** puisse décrire ou prédire une telle déformation de section, lors du calcul d'une poutre, il est nécessaire que figurent parmi les modes de déformations retenus, au moins quelques modes permettant de générer une distorsion.

FIGURE B.3.2 – Modes de distorsions simples pour un IPN déterminés par **CSection**.



Modes de distorsion. Dans **RBT**, on considère qu'une distorsion quelconque peut être approchée par la combinaison de quelques modes de *distorsions simples*; et on choisit pour *distorsions simples*, les *premiers modes de vibration naturelle* de la section (dans son plan ou hors

de son plan). Pour une section donnée, leur détermination est facile : le module **CSection** de **CSB** propose leur calcul systématique ; la figure-B.3.2 montre, pour illustration, les distorsions obtenues pour une section en **I** (IPN100). On notera l'ensemble de ces mode simples de distorsion $\{D^j\}$.

B.3.2 Le modèle de déplacement de RBT

Le modèle de déplacement de **RBT** s'écrit :

$$\mathbf{U}_{RTB}(x, y, z) = \underbrace{\mathbf{u}(z) + \boldsymbol{\omega}(z) \wedge \mathbf{GP}}_{\text{mouvement rigide de section}} + \underbrace{\sum_{i=1}^6 \alpha_i(z) \mathbf{M}^i(x, y) + \left(\sum_{j=1}^m \beta_j(z) \mathbf{D}_j \right)}_{\text{déformation de section}} \quad (\text{B.3.1})$$

Ce modèle utilise pour modes de déformation de section :

- \mathbf{M}^i , les 6 *modes fondamentaux* de déformation de section

et, éventuellement, si la section est mince,

- \mathbf{D}^j , les m modes de distorsions simples

Ce modèle peut aussi s'écrire :

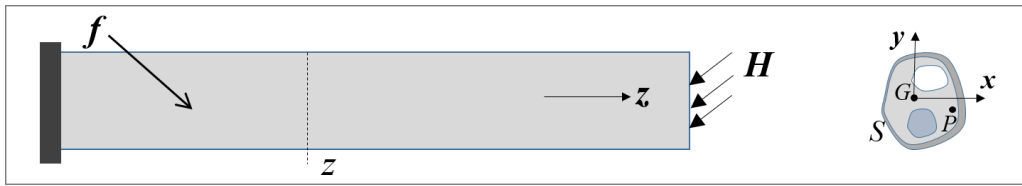
$$\mathbf{U}_{RBT}(x, y, z) = \underbrace{\mathbf{u}(z) + \boldsymbol{\omega}(z) \wedge \mathbf{GP}}_{\text{mouvement rigide de section}} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \eta_k(z) \mathbf{M}^k(x, y)}_{\text{déformation de section}} \quad (\text{B.3.2})$$

où $\mathbf{M}^k = \{\mathbf{M}^i, \mathbf{D}^j\}$ constituent p modes contrôlés par les p paramètres η_k .

Important. Il faut ici souligner que tous les modes considérés sont *propres à la nature physique de la section*, et qu'ils peuvent être déterminés une fois pour toute, tel que le fait le module **CSection** en charge des calculs de section dans **CSB**. Ces modes traduisent *Effets Poisson*, *gauchissements* et *distorsions* de section qui constituent les modes physiques prépondérants dans la déformation d'une section. C'est pourquoi la *base de modes* $\{\mathbf{M}^i, \mathbf{D}^j\}$ constituent un choix *pertinent* de modes, permettant de prédire, pratiquement une déformation quelconque de section.

Ce modèle permettra, par exemple pour un encastrement, de bloquer non seulement la translation et la rotation de la section mais aussi sa déformation, en imposant à tous les paramètres η_k d'être nuls.

FIGURE B.4.1 – Equilibre d'une poutre console



B.4 La théorie de poutre RBT

On se donne, pour la clarté de l'exposé, comme dans le chapitre précédent, l'équilibre d'une poutre console de longueur L d'axe z , de section (quelconque) constante S , soumise à une force de volume f et à une surfacique H appliquée sur la section extrémité S_L . G est le centre de la section, P un point de la section et on note (x, y) les axes de la section.

Le modèle de déplacement RBT. Le modèle de déplacement \mathbf{U}_{RBT} (eq-B.3.1 ou eq-B.3.2) permet plusieurs degrés de liberté (DDL) pour le mouvement de la section :

- les 6 paramètres classiques de translation et rotation de la section
- et les p nouveaux paramètres η_k qui contrôlent les modes de déformation de section, dont le nombre est généralement de 6 et, éventuellement $(6+m)$ si m modes de distortions sont considérés.

Etablir l'ensemble des équations de la théorie de poutre associée à ce modèle de déplacement relève d'une démarche relativement classique mais dont l'exposé est un peu technique. On se contente dans ce qui suit de montrer en quoi le modèle **RBT** permet de mieux satisfaire les conditions aux limites *en force et en déplacement*, pour espérer rendre compte des effets de bords.

Notation : on adopte pour la suite la convention de sommation d'Einstein sur les indices qui permet décrire \mathbf{U}_{RBT} simplement :

$$\mathbf{U}_{RBT}(x, y, z) = \mathbf{u}(z) + \boldsymbol{\omega}(z) \wedge \mathbf{GP} + \eta_k(z) \mathbf{M}^k(x, y)$$

Les actions extérieures généralisées (1D). Le travail des actions extérieures agissant sur la poutre s'écrit :

$$W_{ext} = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} \, dV + \int_{S_L} \mathbf{H} \cdot \mathbf{U} \, dS$$

En utilisant pour déplacement, l'expression de \mathbf{U}_{RBT} , et après intégration sur la section S , ce travail se met sous la forme :

$$W_{ext} = \int_L \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega} + \eta_k \kappa^k \right) dz + \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}(L) + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}(L) + \eta_k(L) Q^k(L)$$

Cette expression fait apparaître toutes les actions extérieures généralisées ou 1D associées au modèle **RBT** :

- celles *classiques* associées au mouvement de solide $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}]$ de la section et dont les expressions sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_S \mathbf{f} \, dS & \mathbf{F} &= \int_S \mathbf{H} \, dS \\ \boldsymbol{\mu} &= \int_S \mathbf{GP} \wedge \mathbf{f} \, dS & \mathbf{C} &= \int_S \mathbf{GP} \wedge \mathbf{H} \, dS \end{aligned}$$

- et celles supplémentaires associées aux modes de déformation \mathbf{M}^k de la section et dont les expressions sont :

$$\kappa^k = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{M}^k \, dS \quad Q^k = \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}^k \, dS$$

Le modèle **RBT** retient donc d'une action extérieure, bien plus que les 6 quantités *classiques* associées à son torseur résultant (force et moment), à savoir les p quantités supplémentaires associées à la projection de l'action extérieure sur les p modes de section \mathbf{M}^k . Cela permet de retenir *plus d'informations* pour représenter une action extérieure, et ainsi mieux représenter les conditions en force.

Les conditions en déplacement ou d'appuis. Le modèle de déplacement \mathbf{U}_{RBT} permet de contrôler non seulement la translation et la rotation d'une section mais aussi sa déformation via les paramètres η_k .

Laisser tous les paramètres $\{u_x, u_y, u_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \dots, \eta_k, \dots\}$ libres signifie que la section est libre de se déplacer et de se déformer. Sinon chacun de ces paramètres peut être contrôlé.

A titre d'exemple voici 3 conditions d'appuis qu'il est intéressant d'évoquer :

- $[\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}]$, impose un encastrement *partiel* de la section, la section reste libre de se déformer ;
- $[\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \{\eta_k = 0, \forall p\}]$ impose un réel encastrement de la section en empêchant toute déformation de la section ;
- $\{\eta_k = 0, \forall p\}$, permet à une section de se mouvoir (translation et rotation) sans se déformer ; cela peut, par exemple, être utile pour simuler la présence d'un diaphragme au droit de la section d'une poutre en caisson.

Les degrés de liberté, que le modèle \mathbf{U}_{RBT} offre pour le mouvement de la section, autorisent une plus grande variété de conditions d'appuis permettant une meilleure représentation ou simulation de la réalité des appuis.

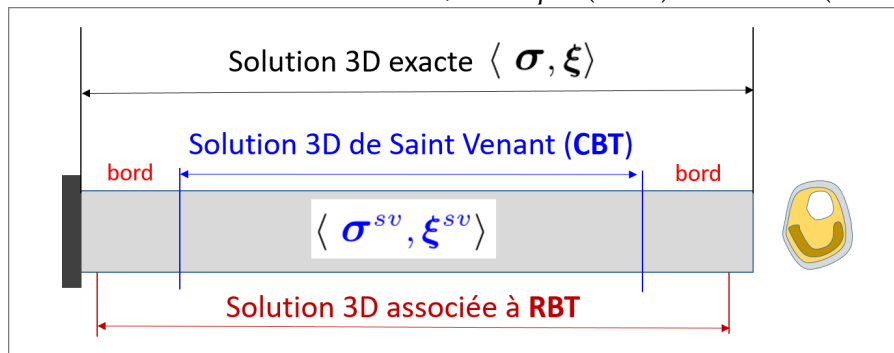
Commentaires. Ainsi dans la théorie **RBT**, les actions extérieures ne se réduisent pas uniquement à une force et un moment, mais aussi à leurs projections sur les modes. Et, les conditions en déplacement ne permettent pas de contrôler uniquement le mouvement global de la section mais aussi sa déformation. Les conditions en force et en déplacement se trouvent donc mieux satisfaites ou représentées, et cela conduit à mieux rendre compte des effets de bord.

On en dira pas plus sur la théorie **RBT**, parce que c'est tout ce que l'on a besoin de savoir pour l'utiliser.

B.4.1 La solution RBT

Maintenant, et c'est le plus important, que vaut réellement la solution 3D associée à la théorie **RBT** comparée à la solution 3D exacte. Pour des calculs numériques, on considère qu'un calcul effectué par éléments finis 3D (EF-3D) représente la solution 3D exacte.

FIGURE B.4.2 – Solution exacte, classique (CBT) et avancée (RBT)



L'analyse de l'équilibre d'un ensemble significatif de configurations de poutres (homogènes ou composites, chargements mécaniques ou variations de température, différentes conditions d'appuis) a montré que les résultats numériques prédits par **RBT** (via **CSB**) étaient tout à fait comparables à ceux obtenus par EF-3D, dans la majeure partie intérieure de la poutre, même pour de faibles élancements [El Fatmi, 2016, Lahmar et al., 2017].

Ces simulations ont par ailleurs montré que la solution **RBT** retrouve¹ la solution 3D de Saint Venant dans la zone intérieure de la poutre (figure-B.4.2), et qu'elle conduit à une solution relativement satisfaisante près des bords.

De plus, plusieurs simulations ont permis de montrer que le modèle **RBT** était aussi en mesure d'obtenir des résultats dignes de calculs par EF-3D, pour les analyses de vibration [Naccache and El Fatmi, 2018a] et de flambement [Naccache and El Fatmi, 2018b] de poutres homogènes ou composites.

1. La raison est contenue dans le choix du modèle de déplacement \mathbf{U}_{RBT} . En effet, l'expression de \mathbf{U}_{RBT} contient (ou inclue) la forme du champ de déplacement solution de Saint Venant \mathbf{U}_{sv} . Il était donc attendu que la solution **RBT** retrouve, loin des bords de la poutre, la solution 3D intérieure décrite par la solution de Saint Venant.

B.5 Que faut-il retenir de RBT ?

RBT est théorie de poutre d'ordre supérieure basée sur un modèle de déplacement qui autorise les principales déformations d'une section : les effets Poisson, les gauchissements et les distorsions (pour les sections minces). **RBT** est établie pour des poutres de section absolument quelconque (forme et matériaux) et elle conduit à des résultats dont la qualité est tout à fait comparable à celle obtenue par EF-3D; qu'il s'agisse d'équilibre, de vibration ou de flambement.

Par rapport à la théorie *classique* des poutres (**TPSV** ou **CBT**), **RBT** permet, via une meilleure représentation des conditions en force et en déplacement, de rendre compte de l'essentiel des *effets de bords*. De plus (et c'est rassurant), loin des bords la solution **RBT** retrouve pratiquement la solution de Saint Venant qui représente correctement la solution intérieure (figure-B.4.2).

Dans le logiciel **CSB**, qu'il s'agisse d'équilibre, de vibration ou de flambement, deux méthodes de résolution sont proposées dans les modules **Spatial Beam** et **Spatial Structure** : *classique* (**CBT**) ou *avancée* (**RBT**) :

- celle *classique* (**CBT**) correspond à l'application de la **TPSV** qui est la théorie classique de référence,
- et celle *avancée* correspond à l'application de la théorie **RBT**, qui permet de rendre compte des effets de bords.

Les calculs, dans **CSB**, étant extrêmement rapides, il ne coûte rien de comparer les deux solutions pour juger de l'influence des *effets de bords*.

Bibliographie

- Rached El Fatmi. A non-uniform warping theory for beams. *C. R. Mecanique*, 335 :467–474, 2007a.
- Rached El Fatmi. Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. part-I : A general beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, 44(0) :5912–5929, 2007b.
- Rached El Fatmi. Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. part-II : Analytical and numerical applications. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :5930–5952, 2007c.
- Rached El Fatmi. Non uniform warping for beams.theory and numerical applications. *European Journal of Computational Mechanics*, 17 :933–944, 2008.
- Rached El Fatmi. A matlab tool to compute the mechanical characteristics of any composite section. *Journal of Composite and Advanced Materials, RCMA*, 3 :395–413, 2012.
- Rached El Fatmi. A refined 1d beam theory built on 3d saint-venant’s solution to compute homogeneous and composite beams. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 11(4) : 345–378, 2016.
- Rached El Fatmi and Nejib Ghazouani. A higher order composite beam theory built on 3d saint venant’ solution, part-1 : theoretical developments. *Composite Structures*, 93 :557–566, 2011.
- Rached El Fatmi and Nejib Ghazouani. A higher order composite beam theory built on 3d saint venant’ solution, part-2 : built-in effect influence on the behavior of end-loaded cantilever beams. *Composite Structures*, 93 :567–581, Composite Structures.
- Rached El Fatmi and Hatem Zenzri. On the structural behavior and the saint venant solution in the exact beam theory : application to laminated composite beams. *Computers & structures*, 80(16) :1441–1456, 2002.
- Rached El Fatmi and Hatem Zenzri. A numerical method for the exact elastic beam theory. Applications to homogeneous and composite beams. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :2521–2537, 2004.
- Nejib Ghazouani and Rached El Fatmi. Extension of the non-uniform warping theory to an orthotropic composite beam. *C. R. Mecanique*, 338 :704–711, 2010.
- Mouna Lahmar, Fares Naccache, and Rached El Fatmi. Thermo-mechanical analysis of composite beams. *Composite Structures*, 162 :388–400, 2017.

Fares Naccache and Rached El Fatmi. Numerical free vibration analysis of homogeneous or composite beam using a refined beam theory built on saint venant's solution. *Computers & Structures*, 210 :102–121, 2018a.

Fares Naccache and Rached El Fatmi. Buckling analysis of homogeneous or composite i-beams using a 1d refined beam theory built on saint venant's solution. *Thin-Walled Structures*, 127 :822–831, 2018b.

Index

A

Actions extérieures, 141
Actions intérieures, 141
Aire, 15
Angle d'enroulement, 57
Angle d'orientation, 57
Anisotrope, 11, 44
Appui élastique, 129
Axes d'inertie, 15, 62
Axes matériels, 57

B

Bernoulli, 13, 137

C

Calcul thermique, 45, 59
Caractéristiques de section, 47, 137, 144
Cas de charge, 69, 83, 107, 122
CBT, 12, 100, 122, 140, 145
Centre de cisaillement, 49, 146
Centre de masse, 46, 149
Centre de torsion, 15, 49, 146
Centre d'inertie, 15, 46, 150
Centre élastique, 46, 150
Centre géométrique, 46, 149
Centres et axes de section, 46
Champ de température, 100
Chargement 1D, 106
Chargement 3D, 106
Chargements mécaniques, 11, 69
Charges critiques, 70, 95, 118, 123, 133
Classical Beam Theory, 12, 100, 140
CMS, 44, 47, 144
Coefficient de Poisson, 39
Combinaison de cas de charge, 70, 87, 111
Comportement 1D, 47, 49, 63, 142, 146, 150
Composite, 11, 44, 137
Conditions d'appuis, 69, 104, 122
Conditions de température, 59
Conduction, 45
Conduction thermique, 39
Constante de dilatation, 39

Constante de gauchissement, 49, 62
Constante de torsion, 15
Constantes de section, 47, 146
Contrainte axiale, 148
Contraintes aux fibres extrêmes, 70
Contraintes de cisaillement, 148
Contraintes de section, 47, 63, 113, 123, 132, 147
Convection, 45
CSection, 11

D

Définition des types d'appuis, 80
Déformation 1D, 142
Déformation gênée, 101
Déformations de section, 48, 52, 63, 149
Déformée 3D d'une poutre, 101
Déversement latéral, 119
Diagrammes des efforts intérieurs, 70, 112, 123, 131
Diaphragme, 101, 162
Distorsions d'une section, 52
Dxf2Gmsh, 12, 34

E

Effets de bords, 13, 14, 101, 137, 154, 157
Effets Poisson, 51, 63, 149
Efforts intérieurs, 46, 141
Éléments finis 1D, 69, 122
Éléments finis 2D, 44, 107
Encastrement partiel, 105, 162
Encastrement réel, 105, 162
Enveloppes, 70, 115
Epures des efforts intérieurs, 70
Equations 1D, 142
Équilibre, 11, 70
Équilibre de poutre, 111
Équilibre de structure, 123

F

Flambement, 11
Flambement de poutre, 118

Flambement de structure, 70, 95, 123, 133
Format .dxf, 34, 74, 124
Format .geo, 22
Format .inp, 22, 32, 74, 124
Format .msh, 22
Fréquences, 70, 94, 116, 123, 132

G

Gauchissement gêné, 13, 154
Gauchissements, 51, 63, 149
Géométrie, 22, 24
Géométrie de section, 45, 55
Géométrie d'une structure, 124
Gmsh, 12, 17, 22
Gradient de température, 69, 107

H

Hétérogène, 11, 137
Homogène, 11, 44, 137
Homogénéisation, 13, 45
Hooke, 40

I

Isotrope, 11, 39
Isotrope transverse, 40

L

Liaison articulée, 69
Liaison complète, 69, 122, 127
Liaison d'assemblage, 127
Liaison élastique, 122
Liaison relaxée, 122, 127
Limite élastique, 39
Listes de matériaux, 39
Localisation du chargement, 100
Longueur de flambement, 69, 70, 122, 123, 135

M

Maillages, 22, 24
Masse volumique, 39
Materials, 12, 39
Matériaux à la section, 56
Matériaux de section, 45
Mécanisme, 69, 87, 106, 122, 130
Méthode *avancée*, 100, 122
Méthode *classique*, 100, 122
Méthode de calcul, 100, 125
Matlab, 12, 17
Matlab Runtime, 12, 17
Mode de flambement, 123

Modèle de déplacement, 157
Modes de déformation de section, 158
Modes de distorsion, 59, 63, 110
Modes de flambement, 95, 118, 133
Modes de vibration, 70, 94, 116, 123, 132
Module de Young, 39
Moments d'inertie, 15, 62
Mouvement 1D, 141
Mouvement rigide de section, 157

N

Nœuds d'assemblage, 69, 70, 123

O

Opérateur de souplesse, 142
Options d'analyse, 102, 110
Orientation de section, 126
Orientations des matériaux, 57
Orthotrope, 39

P

Poids propre, 69, 107, 122
Principe de Saint Venant, 13, 139
Plane Structure, 11, 69

R

RBT, 12, 14, 100, 122, 154, 157
RBTd, 110
RDM, 137, 140
Réactions, 123
Réactions aux appuis, 70
Refined Beam Theory, 12, 100, 157
Repère de l'utilisateur, 61
Rotation de section, 47

S

Saint Venant, 13, 137
Spatial Beam, 11, 100
Section composite stratifiée, 52
Sections réduites d'effort tranchant, 15
Solution 1D, 143
[Solution de Saint Venant](#), 139, 143
[Solution intérieure](#), 139
Spatial Structure, 11, 122
Structure 2D, 69
Structure de poutres, 33

T

Température, 45
Théorie *classique* de poutre, 13

Théorie d'ordre supérieur, 158
Timoshenko, 13, 137
Torsion de Saint Venant, 13, 154
Torsion de Vlasov, 13
Torsion gênée de Vlasov, 154
[TPSV](#), 13, 14, 139, 140, 142
Translation de section, 47

V

Variation de température, 11, 69, 107, 122
Vibration, 11
Vibration de poutre, 116
Vibration de structure, 70, 123, 132
Vlasov, 13, 154

